

Раздел 1. Электрические цепи

Содержание

	Стр.
Раздел 1. Электрические цепи	4
Лекция 1.1 Введение. Основные методы анализа линейных электрических цепей постоянного тока	7
1.1.1 Общие положения и определения. Элементы цепей и их характеристики	7
1.1.1.1 Источник электрической энергии	8
1.1.1.2 Приемник электрической энергии	10
1.1.1.3 Основные определения теории цепей постоянного тока.....	11
1.1.2 Режимы работы электрической цепи	12
1.1.3 Законы Кирхгофа.....	14
1.1.4 Баланс мощности в электрической цепи.....	17
1.1.5 Обзор методов анализа цепей постоянного тока	18
Лекция 1.2 Нелинейные цепи постоянного тока.....	22
1.2.1 Нелинейные цепи общие положения и определения.....	22
1.2.2 Графоаналитический метод расчета нелинейных цепей.....	22
1.2.3 Графический метод расчета неразветвленных цепей с нелинейными элементами	25
1.2.3.1 Последовательное соединение элементов.....	25
1.2.3.2 Параллельное соединение элементов	26
1.2.3.3 Смешанное соединение элементов	28
1.2.3.4 Аналитические расчеты нелинейных цепей	30
Лекция 1.3 Цепи однофазного переменного синусоидального тока. Общие положения и определения	33
1.3.1 Общие положения и определения. Источники синусоидальных ЭДС и токов.....	33
1.3.2 Причины выбора синусоидальной формы тока и промышленной частоты.....	35
1.3.3 Действующее и среднее значения периодических ЭДС, напряжений и токов.....	36
1.3.3.1 Действующее значение периодических ЭДС, напряжений и токов	36
1.3.3.2 Среднее значение синусоидального переменного тока.....	39
1.3.4 Векторные диаграммы	40
1.3.5 Изображение синусоидальных функций времени комплексными числами (символический метод).....	41
1.3.5.1 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме	44
Лекция 1.4 Идеализированные линейные элементы однофазных цепей синусоидального тока	46
1.4.1 Идеальный активный элемент.....	46

1.4.2 Идеальный индуктивный элемент	47
1.4.3 Идеальный емкостный элемент	49
Лекция 1.5 Полная цепь переменного тока. Мощность в цепи переменного тока.....	52
1.5.1 Закон Ома для полной цепи переменного тока, треугольник напряжений	52
1.5.1.1 Закон Ома для Полной цепи переменного тока.....	52
1.5.1.2 Треугольники сопротивлений и тока.....	56
1.5.3 Мощность в цепи переменного тока	58
Лекция 1.6 Электрические резонансы.....	61
1.6.1 Общая характеристика резонансных цепей.....	61
1.6.2 Резонанс напряжений.....	62
1.6.3 Резонанс токов	66
Лекция 1.7 Трехфазные электрические цепи с симметричными и несимметричными приемниками	72
1.7.1 Понятие о трехфазных источниках ЭДС и тока. Способы получения трехфазного тока. Преимущества трехфазной системы электропитания. Способы записи комплексных напряжений генератора.....	72
1.7.2 Соединение «звездой». Соотношения между токами и напряжениями. Симметричный и несимметричный режимы работы. Роль нулевого провода. Векторные диаграммы.....	75
1.7.3 Соединение «треугольником». Соотношения между токами и напряжениями. Симметричный и несимметричный режимы работы. Векторные диаграммы	77
1.7.4 Мощность в трехфазной сети. Универсальная формула мощности.....	79
1.7.4.1 Измерение активной мощности в трехфазных цепях	80
Лекция 1.8 Магнитные цепи.....	83
1.8.1 Основные величины, характеризующие магнитное поле и связь между ними	83
1.8.2 Закон полного тока. Магнитодвижущая сила. Магнитная цепь и ее разновидности.....	85
1.8.3 Основные характеристики ферромагнитных материалов. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи.....	87
1.8.4 Вебер-амперные характеристики и их построение. Законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей.....	88
1.8.5 Расчет простых магнитных цепей.....	90
Лекция 1.9 Переходные процессы в линейных цепях	95
1.9.1 Основные положения и определения	95
1.9.2 Включение катушки на постоянное напряжение. Короткое замыкание катушки с током. Энергия магнитного поля катушки.	97

1.9.3 Заряд и разряд конденсатора. Энергия электрического поля конденсатора. Законы коммутации	102
1.9.4 Включение полной цепи RLC на постоянное напряжение	107
1.9.5 Операторный метод расчета переходных процессов. Теорема Хэвисайда	112

Лекция 1.1 Введение. Основные методы анализа линейных электрических цепей постоянного тока

План лекции

- 1) Общие положения и определения. Элементы цепей и их характеристики.
- 2) Режимы работы электрической цепи.
- 3) Законы Кирхгофа.
- 4) Баланс мощности в электрической цепи.
- 5) Обзор методов анализа цепей постоянного тока.

1.1.1 Общие положения и определения. Элементы цепей и их характеристики

Электрической цепью называется искусственно созданный путь для электрического тока. Пример электрической цепи дан на рисунке 1.

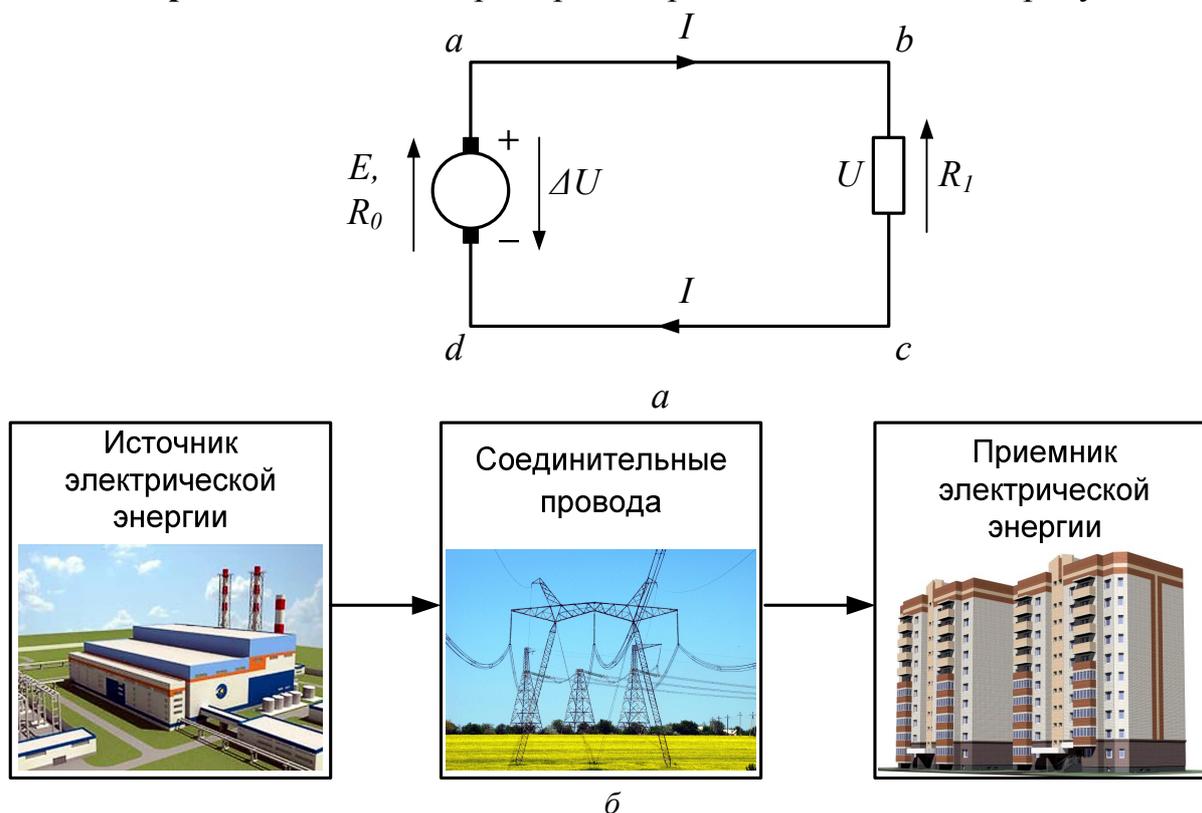


Рисунок 1 - Электрическая цепь: а – принципиальная электрическая схема; б – блок схема

Основное назначение электрической цепи - распределение и взаимное преобразование электрической и других видов энергии.

Электрическая цепь состоит из трех основных элементов:

- источника электрической энергии;
- приемника электрической энергии;

- соединительных проводов.

Рассмотрим каждый из этих элементов цепи подробнее.

1.1.1.1 Источник электрической энергии

Источники электрической энергии разнообразны: гальванические элементы, аккумуляторы, генераторы, термоэлектрические и солнечные батареи и т.д., рисунок 2,а.

Они превращают химическую, механическую, тепловую, световую или энергию других видов в электрическую энергию.

На схемах источники энергии обозначаются так, как показано на рисунке 2,б.

Везде R_0 - внутреннее сопротивление источника энергии.

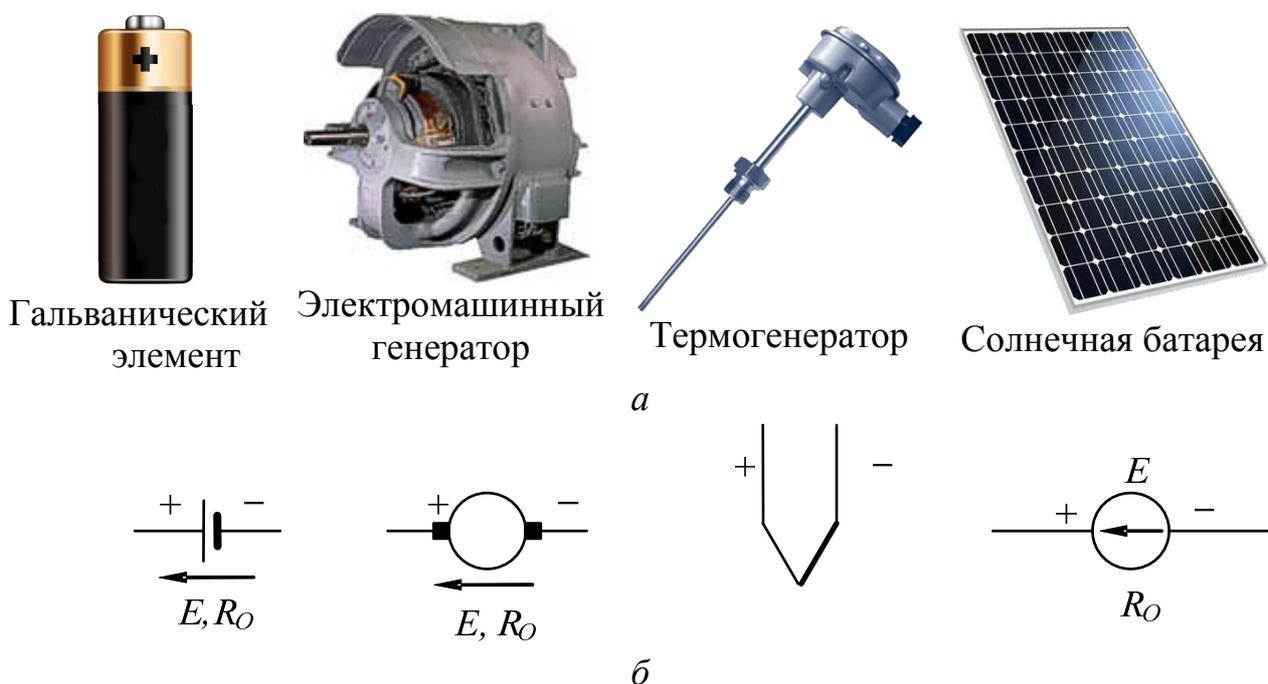


Рисунок 2 - Условные обозначения источников

В элементах и аккумуляторах, внутреннее сопротивление - это сопротивление электролита и граничных слоев между электролитом и электродами, в генераторах - это сопротивление меди обмоток.

Основное назначение источника энергии - создать и постоянно поддерживать в цепи разность потенциалов, разность электрических уровней; создать как бы электрический напор, под воздействием которого и образуется упорядоченное движение электрических зарядов, то есть ток.

Принято зажим высшего потенциала источника обозначать знаком «+», а зажим низшего потенциала знаком «-».

Разность электрических потенциалов количественно определяется величиной, которая называется - электродвижущей силой или коротко ЭДС и обозначается на схемах буквой «E»

$$E = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1)$$

где φ_1 - высший потенциал или уровень источника;
 φ_2 - низший потенциал источника.

Направление действия ЭДС обозначается стрелкой, направленной от низшего потенциала к высшему, то есть от «-» к «+».

Работа источника хорошо оценивается с помощью, так называемой внешней характеристики.

Внешней характеристикой называется функциональная зависимость напряжения на клеммах источника от величины тока, протекающего через источник.

Примерный вид внешних характеристик источников электрической энергии показан на рисунках 3 и 4.

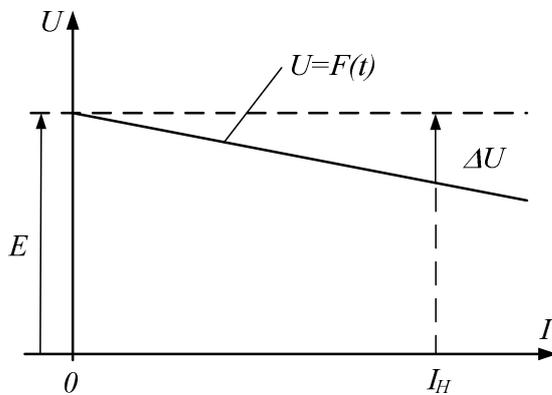


Рисунок 3 - Внешняя характеристика источника напряжения

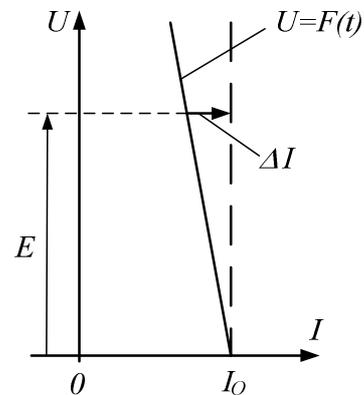


Рисунок 4 - Внешняя характеристика источника тока

Из характеристики видно, что с увеличением тока напряжение на клеммах источника несколько уменьшается за счет потери напряжения на внутреннем сопротивлении R_0 . В целом, же с ростом тока, напряжение на источнике остается более или менее постоянным.

Подобные характеристики имеют гальванические элементы, аккумуляторы, электромашинные генераторы постоянного тока, выпрямители.

На рисунке 4 приведена внешняя характеристика источника электрической энергии другого вида.

Здесь, ток вырабатываемый источником остается более или менее постоянным, при значительном изменении напряжения на клеммах источника.

Отличительная особенность таких источников - очень большая величина внутреннего сопротивления, значительно превышающая сопротивление приемника электрической энергии. Данные источники строят по специальным схемам и широко применяют в современной электронике.

1.1.1.2 Приемник электрической энергии

Приемники электрической энергии или нагрузки, или потребители - разнообразны. Это могут быть электрические лампы, нагревательные приборы, электродвигатели и другие устройства.

В нагрузках электрическая энергия преобразуется в тепловую, световую, механическую и другие виды энергии.

На схемах, нагрузка учитывается с помощью соответствующих сопротивлений и условно обозначается так, как показано на рисунке 5.

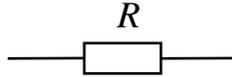


Рисунок 5 - Условное изображение нагрузки

В общем случае сопротивление нагрузки R зависит от тока, протекающего по нему. Однако, эта зависимость при расчетах цепей используется редко.

На практике, чаще используют зависимость напряжения нагрузки от тока нагрузки, которая называется вольтамперной характеристикой.

Вольтамперной характеристикой называется функциональная зависимость напряжения на зажимах нагрузки от тока, протекающего через нагрузку.

Вольтамперные характеристики могут быть самыми разнообразными, например такими, как показано на рисунке 6.

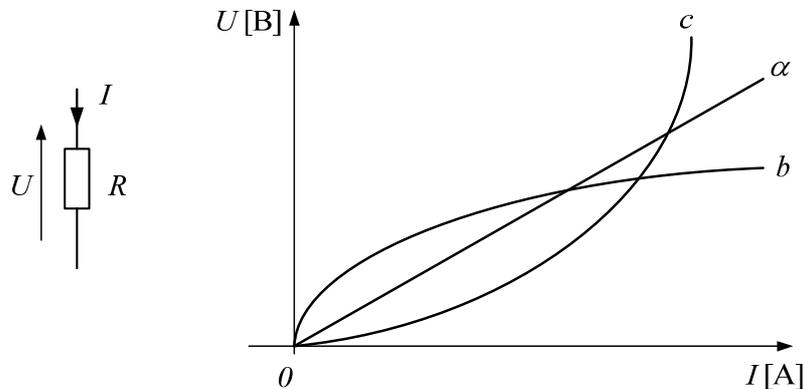


Рисунок 6 - Вольтамперные характеристики нагрузки

Характеристика «а» называется линейной. Характеристики «b» и «с» называются нелинейными. Поэтому нагрузки бывают линейными и нелинейными.

Линейным элементом или нагрузкой называют такой, сопротивление которого R , при любых значениях тока через него, остается постоянным, а вольтамперная характеристика представляет собой прямую линию.

Нелинейным элементом называют такой, сопротивление которого R непостоянно и зависит от величины тока, проходящего через

него, а вольтамперная характеристика представляет собой кривую линию.

Только линейные элементы подчиняются закону Ома:

$$U = RI; \quad R = \frac{U}{I}; \quad I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$



Рисунок 7 - Георг Симон Ом. Немецкий физик. Установил основной закон электрической цепи (закон Ома). Член Баварской АН (1845), член-корреспондент Берлинской АН, иностранный почетный член Лондонского Королевского общества (1842).

Соединительные провода

Соединительные провода или линия, обозначены на рисунке 1 - $a - b$ и $d - c$. Они обеспечивают передачу электрической энергии, транспортируют энергию от источника к нагрузке.

Их назначение передать электрическую энергию потребителю с минимальными потерями.

Рассмотрев отдельные элементы, вернемся обратно к электрической цепи, как к сосредоточию всех элементов.

1.1.1.3 Основные определения теории цепей постоянного тока

Цепью постоянного тока называется такая цепь, в которой ЭДС, токи и напряжения остаются постоянными по величине и не зависят от времени.

Цепи делятся на два больших класса:

- линейные;
- нелинейные.

Электрические цепи, содержащие только элементы с линейными вольтамперными характеристиками, называются линейными цепями.

Электрические цепи, содержащие элементы с нелинейными характеристиками называются нелинейными цепями.

Строго говоря, любые цепи нелинейны, однако, если степень нелинейности мала, то ею пренебрегают и считают такую цепь линейной.

В дальнейшем мы будем рассматривать пока только линейные цепи, так как лишь они подчиняются закону Ома и могут рассчитываться аналитическими методами.

1.1.2 Режимы работы электрической цепи

Любая электрическая цепь состоит из двух участков:

- внешний участок цепи, с сопротивлением R ;
- внутренний участок цепи, имеющий сопротивление R_0 .

Внешним участком цепи или внешней цепью называют часть цепи, которая присоединяется извне к зажимам источника.

Внутренним участком цепи или внутренней цепью называют часть цепи, которая проходит внутри источника энергии между его зажимами через электролит или обмотки генератора.

Электрические цепи делятся на замкнутые и разомкнутые.

Замкнутая цепью - такая, в которой имеется непрерывный путь для тока, а общее сопротивление цепи меньше бесконечности,

$$R + R_0 < \infty.$$

Разомкнутой цепью называют такую цепь, в которой путь для тока прерывается, а общее сопротивление равно бесконечности

$$R + R_0 = \infty.$$

По закону Ома для полной цепи имеем
$$I = \frac{E}{R + R_0},$$

если $R + R_0 < \infty$, то $I > 0$, если $R + R_0 = \infty$, то $I = 0$. (3)

Отсюда следуют выводы:

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) только в замкнутой цепи может протекать ток; 2) в разомкнутой цепи ток не существует, но может существовать напряжение или ЭДС. |
|---|

Ток протекает по проводнику цепи, поэтому стрелку тока принято размечать на самом проводнике.

За положительное направление тока во внешней цепи, принято направление от высшего потенциала к низшему, то есть от «+» к «-».

За положительное направление тока во внутренней цепи принято направление от низшего потенциала к высшему, то есть от «-» к «+».

Напряжение на любом участке цепи есть реакция на ток, поэтому стрелку напряжения принято размечать параллельно элементу и всегда против ранее размеченной стрелки тока. (см. рисунок 8).

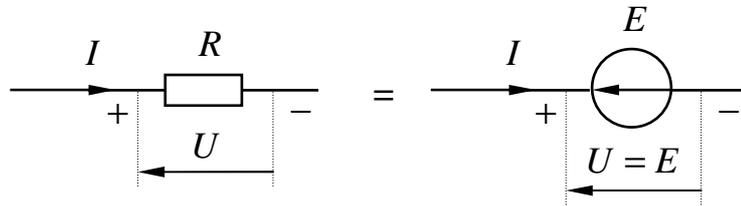


Рисунок 8 - Стрелки тока и напряжения

Электрическая цепь может работать в различных режимах, однако все эти режимы, сколько бы их ни было, находятся между двумя крайними режимами - холостым ходом и коротким замыканием.

Режимом холостого хода цепи называют такой режим, при котором сопротивление нагрузки $R = \infty$, то есть внешняя цепь разомкнута (см. рисунок 9). Следовательно,

$$I_{XX} = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E}{\infty + R_0} = 0. \quad (4)$$

При режиме холостого хода ток холостого хода равен нулю.

Режимом короткого замыкания цепи называется такой режим, при котором сопротивление нагрузки $R = 0$, то есть внешняя цепь замкнута накоротко (см. рисунок 10).

Следовательно,

$$I_{K3} = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E}{0 + R_0} = \frac{E}{R_0} = \max. \quad (5)$$

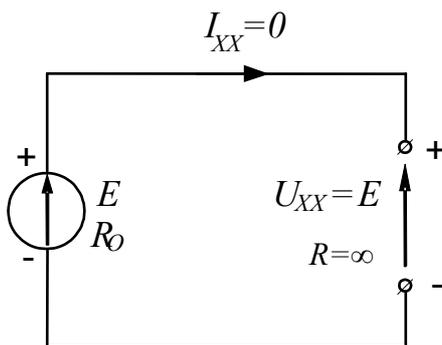


Рисунок 9 - Режим холостого хода

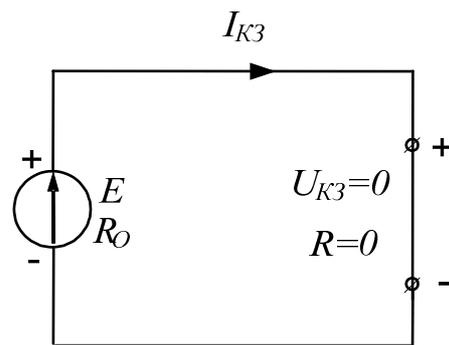


Рисунок 10 - Режим короткого замыкания

Таким образом, при коротком замыкании ток в цепи максимален и ограничивается только величиной внутреннего сопротивления R_0 источника энергии.

Чтобы ток короткого замыкания не разрушал источника его внутреннее сопротивление не должно быть слишком малым.

Если записать уравнения электрического состояния цепи, показанной на рисунке 1, по второму закону Кирхгофа, то получим

$$E - \Delta U - U = 0, \text{ отсюда } U = E - \Delta U = E - R_0 I. \quad (6)$$

Из выражения (1.5) следует, что

$$\boxed{U = E \text{ при } I_{XX} = 0}. \quad (7)$$

ЭДС источника численно равна напряжению на его клеммах при холостом ходе.

ЭДС источника отличается от напряжения источника на величину потери напряжения внутри источника.

ЭДС - самое большое напряжение, которое может развивать источник при холостом режиме.

Из выражения (5) следует, что внутреннее сопротивление должно быть минимальным, чтобы внутри источника не было больших потерь напряжения.

Из условий (4) и (5) выбирается оптимальное значение величины внутреннего сопротивления R_0 источника.

1.1.3 Законы Кирхгофа

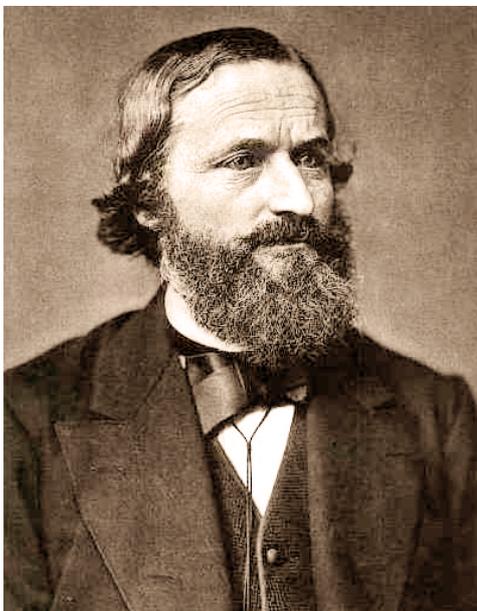


Рисунок 11 – Великий немецкий физик Густав Роберт Кирхгоф. Член Берлинской АН (1875), член-корреспондент Санкт-Петербургской академии наук (1862)

До сих пор мы рассматривали простые или неразветвленные цепи. Эти цепи решаются с помощью закона Ома. Сложные или разветвленные цепи рассчитываются при помощи законов Кирхгофа.

Законы Кирхгофа являются основными расчетными законами электротехники. Закон Ома частный случай законов Кирхгофа.

Портрет великого немецкого физика Г.Р. Кирхгофа приведен на рисунке 11.

Сложной или разветвленной цепью называют такую, в которой имеется несколько путей для растекания токов (см. рисунок 12).

Точки разветвления цепи А и Б - узлы цепи.

Узлами называются точки цепи, в которых соединяются ме-

жду собой три или более проводников.

Проводники, соединяющие между собой узлы, называются ветвями.

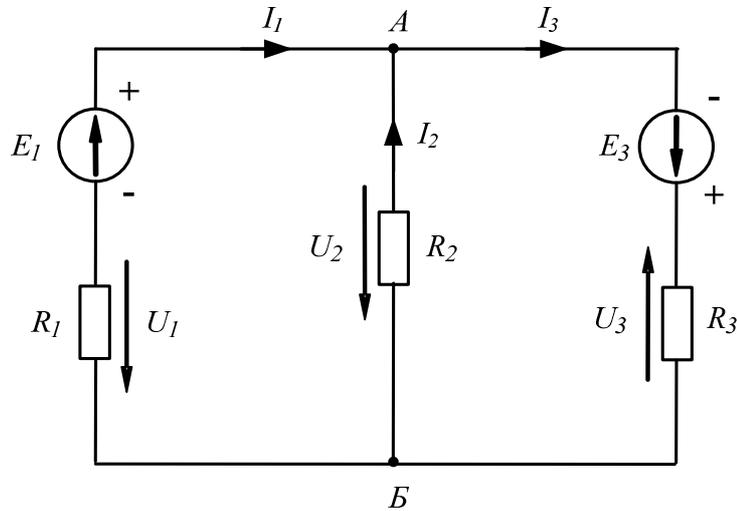


Рисунок 12 - Сложная цепь постоянного тока

Ветви бывают двух видов: активные и пассивные.

Активной ветвью называется такая ветвь, которая содержит не только сопротивления, но и источники энергии.

Пассивной ветвью называется такая ветвь, которая содержит только сопротивления, но не содержит источников энергии.

Таким образом, сложная цепь состоит из узлов и ветвей, то есть из 2-х элементов, поэтому и законов Кирхгофа два. Первый закон Кирхгофа управляет узлами, а второй - ветвями (контурами).

Первый закон Кирхгофа гласит:

В любом узле сложной цепи алгебраическая сумма токов равна нулю.

$$\left(\sum_{i=3}^{i=n} I_i \right)_A = 0, \quad (8)$$

где i - количество токов связанных с рассматриваемым узлом;
 A - обозначение рассматриваемого узла.

Первый закон основан на принципе невозможности накопления электрического заряда в одной точке цепи.

Принято токи, притекающие к узлам цепи, считать положительными и брать со знаком плюс, а токи, оттекающие от узлов, считать отрицательными и брать со знаком минус.

Запишем первый закон Кирхгофа для узлов А и Б нашей цепи (рисунок 1.10).

$$\left(\sum_{i=1}^{i=3} I_i \right)_A = I_1 + I_2 - I_3 = 0, \quad \left(\sum_{i=1}^{i=3} I_i \right)_B = -I_1 - I_2 + I_3 = 0. \quad (9)$$

Сравнивая уравнения между собой, видим, что одно из них является следствием другого. Поэтому в цепи выделяют узлы, которые называют независимыми.

Независимыми узлами называют такие, которые отличаются друг от друга, хотя бы одним током.

Число независимых уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, равно числу независимых узлов в сложной цепи и равно общему числу узлов в цепи без одного.

$$\text{Число независимых узлов} = n - 1, \quad (10)$$

где n - общее число узлов сложной цепи.

Ветви сложной цепи, образуют контура.

Второй закон Кирхгофа гласит:

В любом контуре сложной цепи алгебраическая сумма ЭДС и напряжений действующих в этом контуре равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{i=n} E_i + \sum_{k=1}^{k=m} U_k = 0 \quad (11)$$

где i – количество источников ЭДС в рассматриваемом контуре;

k – количество напряжений входящих в данный контур.

Данная формулировка справедлива, если стрелки напряжений на схеме цепи расставлены против стрелок токов.

Примечание:

В некоторых литературных источниках, стрелки напряжений направляются согласно стрелкам тока. Это допустимо, если использовать следующую формулировку второго закона Кирхгофа:

В любом контуре сложной цепи, алгебраическая сумма ЭДС всегда равна алгебраической сумме напряжений действующих в этом контуре.

$$\sum_{i=1}^{i=n} E_i = \sum_{k=1}^{k=m} U_k. \quad (12)$$

Второй закон Кирхгофа записывается только для независимых контуров.

Независимыми контурами сложной цепи называются такие, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом цепи не использованным в ранее намеченных контурах.

Число независимых уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, равно числу независимых контуров в цепи.

$$\text{Число уравнений по 2-му закону Кирхгофа} = q - n + 1, \quad (13)$$

где q - общее число ветвей всей цепи.

При обходе по контуру стрелки ЭДС и напряжений, совпадающие с направлением обхода, берутся со знаком плюс, встречно направленные - со знаком минус.

Запишем уравнения электрического состояния контура (см. рисунок 12) по второму закону Кирхгофа:

а) при обходе слева направо $E_1 + U_2 - U_1 = 0$;

б) при обходе справа налево $-E_1 + U_1 - U_2 = 0$.

Следовательно, направление обхода контуров можно выбирать произвольно.

Законы Кирхгофа позволяют рассчитывать самые сложные цепи.

1.1.4 Баланс мощности в электрической цепи

Рассмотрим энергетический баланс в электрической цепи. Пусть задана цепь вида,

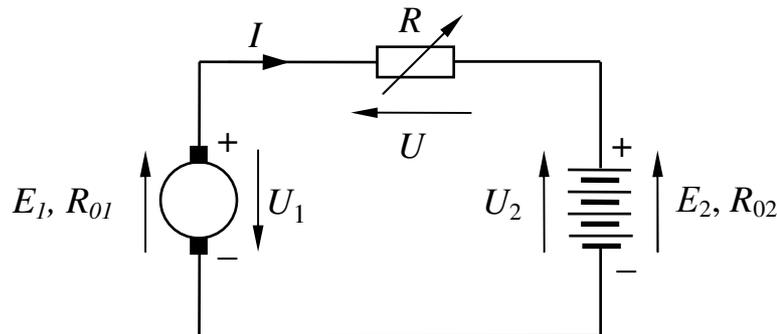


Рисунок 13 - К балансу мощности

Дано: $E_1, E_2, R_{O1}, R_{O2}, R, E_1 > E_2$.

Найти: Составить баланс.

После расстановки стрелок тока и напряжения по второму закону Кирхгофа электрическое состояние цепи запишется

$$E_1 - U_1 - U - U_2 - E_2 = 0, \text{ отсюда } E_1 = R_{O1}I + RI + R_{O2}I + E_2.$$

Умножим обе части равенства на ток I , получим

$$E_1I = R_{O1}I^2 + RI^2 + R_{O2}I + E_2I.$$

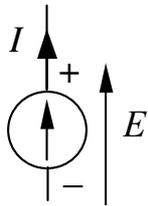
Следовательно,

$$P_G = P_1 = E_1I - \text{мощность, генерируемая в цепи.}$$

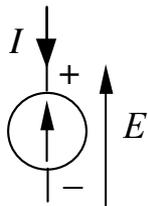
$$P_H = R_{O1}I^2 + RI^2 + R_{O2}I + E_2I - \text{потребляемая энергия. Таким обра-}$$

$$\text{зом } P_G - P_H = 0. \quad (14)$$

По закону сохранения энергии количество вырабатываемой в цепи энергии всегда равно количеству энергии потребляемой цепью. Следует всегда помнить, при составлении баланса энергии в цепи, что не всякий источник энергии, действующий в цепи, является генератором, а именно:



Когда действительный ток через источник совпадает по направлению с ЭДС источника, то этот источник вырабатывает энергию, то есть является генератором.



Когда действительный ток через источник протекает навстречу ЭДС источника, то этот источник потребляет энергию, то есть является нагрузкой (пример: зарядка аккумулятора).

1.1.5 Обзор методов анализа цепей постоянного тока

В настоящее время разработано много методов для расчета цепей постоянного тока. В зависимости от конфигурации и условий заданной цепи для расчета цепи применяются различные методы.

Искусство расчетчика состоит в том, что он находит наиболее рациональный метод решения к конкретно заданной цепи. Сделаем краткий обзор наиболее употребительных методов расчета цепей.

Метод законов Кирхгофа

Это старейший из расчетных методов. Он основан на составлении уравнений по первому и второму законам Кирхгофа и решению их относительно токов текущих в ветвях. Порядок системы уравнений здесь равен количеству неизвестных токов

Непосредственное применение законов Кирхгофа к расчету сложной цепи приводит к весьма громоздким вычислениям, так как приходится решать систему с большим числом уравнений. Поэтому, этот метод на практике применяется крайне редко в виду его неэкономичности.

Метод контурных токов

Метод контурных токов был предложен известным английским физиком и электротехником Джеймсом К. Максвеллом. По этому методу цепь разбивается на ряд контуров, соприкасающихся друг с другом.

Предполагается, на время расчета, что каждый контур обтекает только присущим ему током, который называется контурным током. Контурных токов столько, сколько имеется в цепи независимых контуров. По-

сколькx, контуров в цепи всегда меньше числа ветвей, то контурных токов в цепи всегда меньше числа реальных токов.

Таким образом, основное преимущество метода контурных токов перед методом законов Кирхгофа состоит в сокращении числа расчетных уравнений.

По известным контурным токам, действительные токи определяются простым алгебраическим сложением.

Метод контурных токов получил широкое распространение в инженерной практике, благодаря экономным затратам времени на расчет.

Метод узловых потенциалов

Метод узловых потенциалов основан на первом законе Кирхгофа и на законе Ома. Преимущество метода состоит в том, что он позволяет сократить число расчетных уравнений и тем самым уменьшить вычислительную работу.

Согласно методу, один из узлов цепи мысленно заземляется, что не влияет на работу цепи. Потенциалы остальных узлов определяются из решения специальной системы уравнений.

Токи в ветвях находят по разности потенциалов между узлами, с учетом межузлового сопротивления.

Поскольку узлов в цепи всегда меньше, чем ветвей, метод весьма экономичен.

Метод узлового напряжения

Это частный случай метода узловых потенциалов для цепи с двумя узлами.

Чтобы токи в ветвях были рассчитаны правильно, необходимо с большой точностью находить величину узлового напряжения. В этом один из крупных недостатков метода узлового напряжения.

Указанный метод получил весьма широкое применение в расчетной практике благодаря своей экономичности в вычислительной работе.

Метод наложения (суперпозиции)

Метод основан на принципе Д'Аламбера - независимости действия сил на линейную систему. Проиллюстрируем принцип Д'Аламбера, рисунком 14.

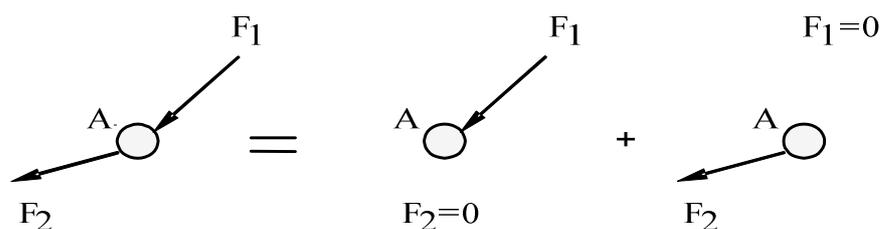


Рисунок 14 - К принципу Д'Аламбера

В электрической цепи вместо сил используют ЭДС цепи. Схему решают столько раз, сколько имеется в цепи источников энергии.

Результаты решения алгебраически суммируют.

Метод линейных преобразований

Данный метод основан на использовании закона Ома и формул последовательного, параллельного, смешанного соединения сопротивлений, а также перехода от соединения сопротивлений в треугольник к звезде.

Сначала сложная цепь свертывается до предельно простой и решается по закону Ома – прямой путь. Затем, полученное решение развертывается до заданной конфигурации цепи – обратный путь.

Основное условие применимости метода – в цепи должен быть только один источник питания.

Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора позволяет определить ток в одной отдельно взятой ветви сложной цепи с сопротивлением R_i , без расчета всех остальных токов.

Суть метода в том, что всю внешнюю по отношению к искомой ветви цепь представляют, как некий эквивалентный генератор с напряжением на зажимах U_{ixx} и некоторым внутренним сопротивлением R_{K3} .

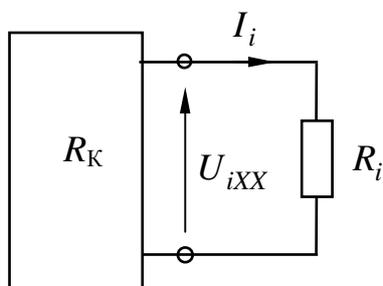


Рисунок 15 - Эквивалентный генератор

Эквивалентная схема цепи, полученная в результате преобразований исходной схемы, изображена на рисунке 15.

В результате, искомый ток определяют по закону Ома

$$I_i = \frac{U_{ixx}}{R_K + R_i}. \quad (15)$$

Контрольные вопросы

1 Цепи постоянного тока (состав и особенности элементов цепи, где применяются). Режимы работы электрической цепи (холостой ход, нормальный, номинальный, короткозамкнутый). Сложная цепь, ветви, узлы. Первый и второй законы Кирхгофа. Закон сохранения энергии.

2 Расчет цепи постоянного тока методом законов Кирхгофа (разобрать на примере).

3 Расчет цепи постоянного тока методом контурных токов (разобрать на примере).

4 Эквивалентные преобразования в цепях постоянного тока при последовательном, параллельном и смешанном соединениях сопротивлений. Эквивалентное преобразование треугольника сопротивлений в звезду.

Лекция 1.2 Нелинейные цепи постоянного тока

План лекции

- 1) Нелинейные цепи (общие понятия).
- 2) Графоаналитический метод расчета нелинейных цепей.
- 3) Графический метод расчета нелинейных цепей.
- 4) Аналитические расчеты нелинейных цепей.

1.2.1 Нелинейные цепи общие положения и определения

Электрические цепи, содержащие элементы с нелинейными вольтамперными характеристиками, называются нелинейными.

Нелинейные элементы делятся на симметричные и несимметричные.

Симметричными нелинейными элементами называются такие, у которых вольтамперные характеристики не зависят от направления тока в них и напряжения на зажимах.

Сюда можно отнести, например, электрические лампы, варисторы, термисторы, катушки со стальными сердечниками.

Несимметричными нелинейными элементами называются такие, у которых вольтамперные характеристики различны при разных направлениях тока и напряжения на зажимах.

Сюда можно отнести, например, электрическую дугу с разнородными электродами, полупроводниковые приборы (диоды, транзисторы, тиристоры).

1.2.2 Графоаналитический метод расчета нелинейных цепей.

Один из методов расчета нелинейных цепей называется графоаналитическим. Для его использования вводят понятие статического и дифференциального сопротивления нелинейного элемента;

Рассмотрим эти понятия, на примере нелинейного элемента, вольт-амперная характеристика которого, изображена на рисунке 1.

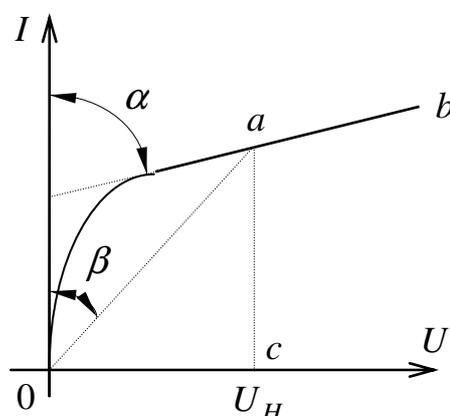


Рисунок 1 - К определению статического и дифференциального сопротивлений

На данной кривой, точка A , характеризует рабочий режим элемента. Статическое сопротивление $-R$, для режима в точке A , определится следующим образом

$$R = \frac{U}{I} = \frac{m_U \cdot OC}{m_I \cdot CA} = m_R \operatorname{tg} \beta, \quad (1)$$

где m_U , m_I , m_R - масштабы напряжения, тока и сопротивления, соответственно.

Статическое сопротивление пропорционально тангенсу угла между прямой, соединяющей точку A с началом координат и осью токов.

Дифференциальное сопротивление $-R_D$, для режима в точке A , определится таким образом

$$R_D = \frac{dU}{dI} = m_R \operatorname{tg} \alpha. \quad (2)$$

Дифференциальное сопротивление это первая производная от напряжения элемента по току в рабочей точке.

Дифференциальное сопротивление пропорционально тангенсу угла между касательной к вольтамперной характеристике в точке A и осью токов.

Для прямолинейных участков вольтамперных характеристик дифференциальное сопротивление можно определить отношением конечного приращения напряжения к конечному приращению тока

$$R_D = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (3)$$

Для элементов с возрастающей характеристикой $R_D > 0$, а для элементов с падающей - $R_D < 0$.

На линейных участках вольтамперной характеристики величина дифференциального сопротивления остается постоянной, поэтому она и используется в аналитических расчетах.

Если вольтамперная характеристика на некотором участке близко совпадает с прямой линией и работа цепи осуществляется на этом участке, то нелинейный элемент можно заменить источником напряжения и линейным динамическим сопротивлением, то есть активной линейной ветвью.

Рассмотрим этот прием подробнее. Пусть нам даны вольтамперные характеристики двух элементов 1 и 2, изображенные на рисунке 2.

Работа цепи производится на участках ab и cd соответствующих характеристик. Найдем параметры и вид эквивалентной линейной цепи, способной на время расчета заменить исходный нелинейный элемент.

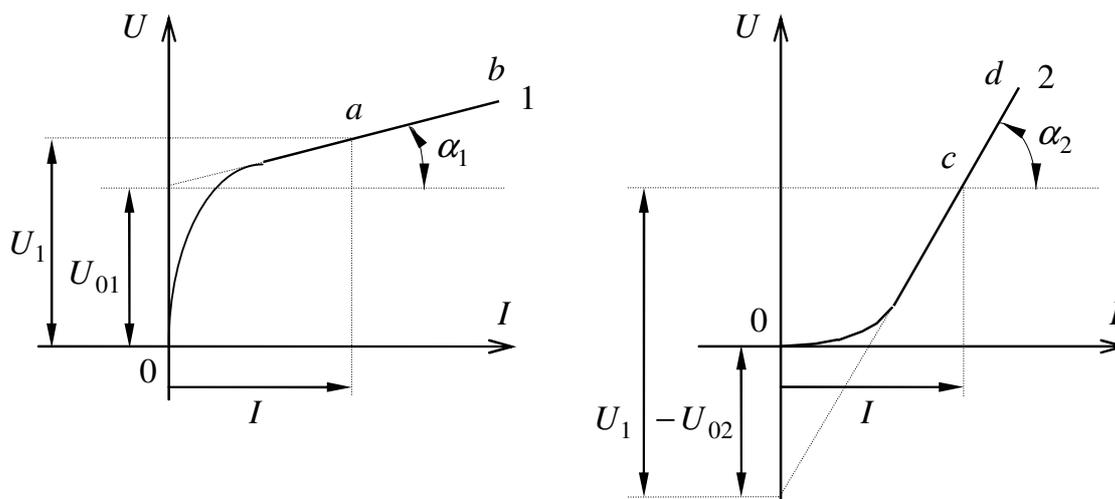


Рисунок 2 - Линеаризация нелинейных элементов

Согласно рисунку имеем:

а) для элемента 1

$$U_1 = U_{01} + m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot I = U_{01} + R_{Д1} I; \quad (4)$$

б) для элемента 2

$$U_2 = -U_{02} + m_R \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot I = -U_{02} + R_{Д2} I. \quad (5)$$

В соответствии с выражениями (4) и (5), нелинейные элементы 1 и 2 можно заменить следующими эквивалентными схемами:

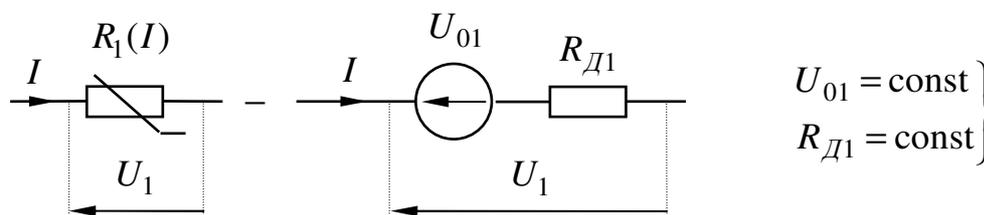


Рисунок 3 - Схема замещения нелинейного элемента 1

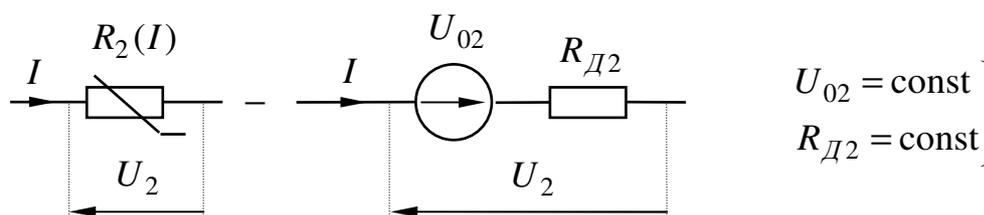


Рисунок 4 - Схема замещения нелинейного элемента 2

Все соотношения, которые можно установить, пользуясь эквивалентными схемами, справедливы лишь для таких режимов, когда все нелинейные элементы электрической цепи работают на прямолинейных участках своих вольтамперных характеристик.

1.2.3 Графический метод расчета неразветвленных цепей с нелинейными элементами

1.2.3.1 Последовательное соединение элементов

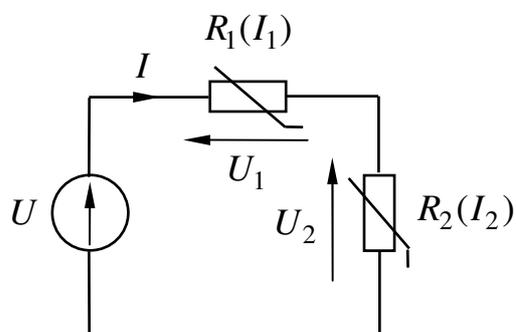


Рисунок 5 - Последовательная нелинейная цепь

Решим графически цепь, схема которой изображена на рисунке 5.

Дано:

Входное напряжение U ; вольт-амперные характеристики элементов $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$.

Найти:

Ток и напряжения на элементах.

Порядок расчета

1. Строим вольтамперные характеристики нелинейных элементов.

Для графического расчета, нужно тщательно построить заданные вольтамперные характеристики в одном масштабе на одном графике, см. рисунок 6.

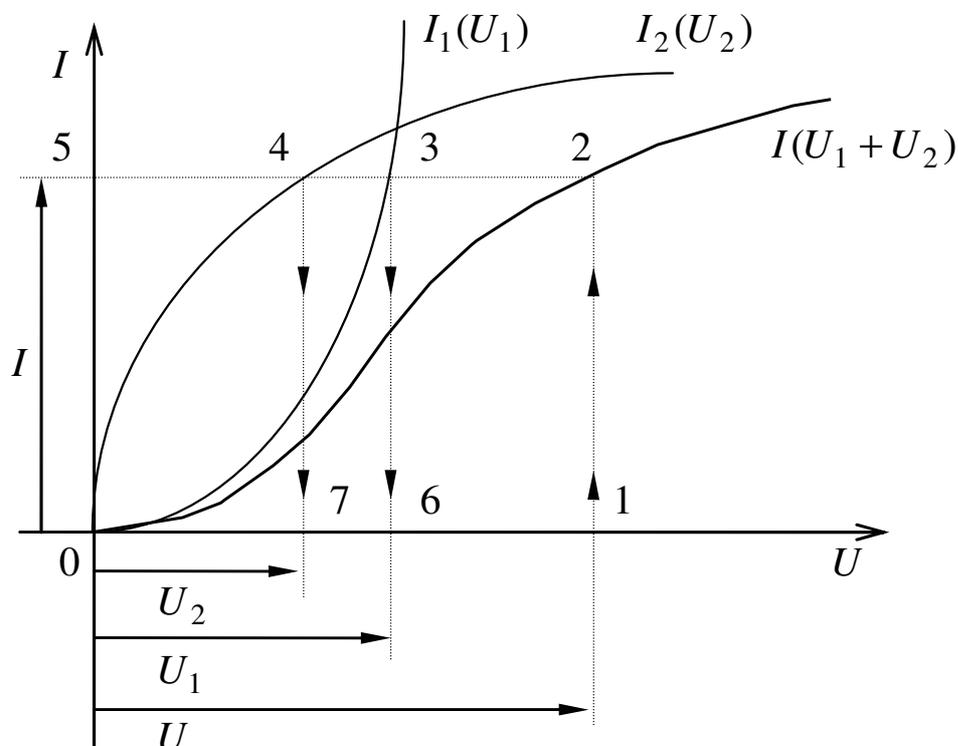


Рисунок 6 - Графический расчет

2. Строим вспомогательную характеристику, рисунок 6.

Вспомогательная характеристика в нашем случае представляет собой зависимость тока I от общего напряжения ($U_1 + U_2$).

Так как в неразветвленной цепи протекает только один ток, то для построения вспомогательной характеристики $I(U_1 + U_2)$, достаточно просуммировать напряжения U_1 и U_2 для одних и тех же значений тока I .

3. Определяем общий ток цепи.

Для этого производим следующее графическое построение.

1) По оси напряжений откладываем в масштабе заданное входное напряжение U , получаем точку 1.

2) Из точки 1 восстанавливаем перпендикуляр до пересечения со вспомогательной кривой $I(U_1 + U_2)$, получаем точку 2.

3) Из точки 2 проводим прямую, параллельную оси напряжений до пересечения с осью токов, получаем точку 5. Точка 5 в масштабе определяет значение искомого тока I .

4. Определяем напряжение на первом нелинейном элементе U_1 .

Для этого, опускаем перпендикуляр из точки 3 на ось напряжения, получаем точку 6. Точка 6, определяет напряжение U_1 .

5. Определяем напряжение на втором нелинейном элементе U_2 .

Для этого, опускаем перпендикуляр из точки 4 на ось напряжения, получаем точку 7. Точка 7 определяет напряжение U_2 .

Такие же построения для расчета тока и напряжений надо выполнить, если один из элементов имеет линейную вольтамперную характеристику.

Аналогично решается задача расчета цепи состоящей из трех или большего числа последовательно соединенных элементов с нелинейными и линейными характеристиками.

1.2.3.2 Параллельное соединение элементов

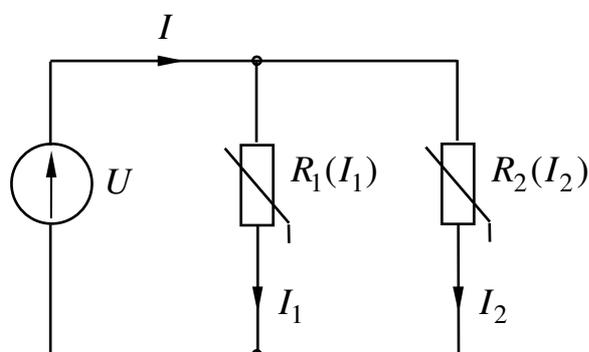


Рисунок 7 - Параллельная нелинейная цепь

Решим графически цепь, схема которой изображена на рисунке 7.

Дано:

Входное напряжение U и вольтамперные характеристики элементов $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$.

Найти:

Все токи, протекающие через элементы.

Порядок расчета

1. Строим вольтамперные характеристики нелинейных элементов.

Для графического расчета, и здесь, нужно тщательно построить заданные вольтамперные характеристики в одном масштабе на одном графике, см. рисунок 8.

2. Строим вспомогательную характеристику.

Вспомогательная характеристика при параллельном соединении представляет собой $(I_1 + I_2)U$, то есть зависимость общего тока I от общего напряжения. Так как при параллельном соединении на все элементы действует одно напряжение U , то для построения вспомогательной характеристики, необходимо в соответствии с соотношением - $I = I_1 + I_2$, произвести суммирование ординат кривых $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$ для одних и тех же значений напряжения.

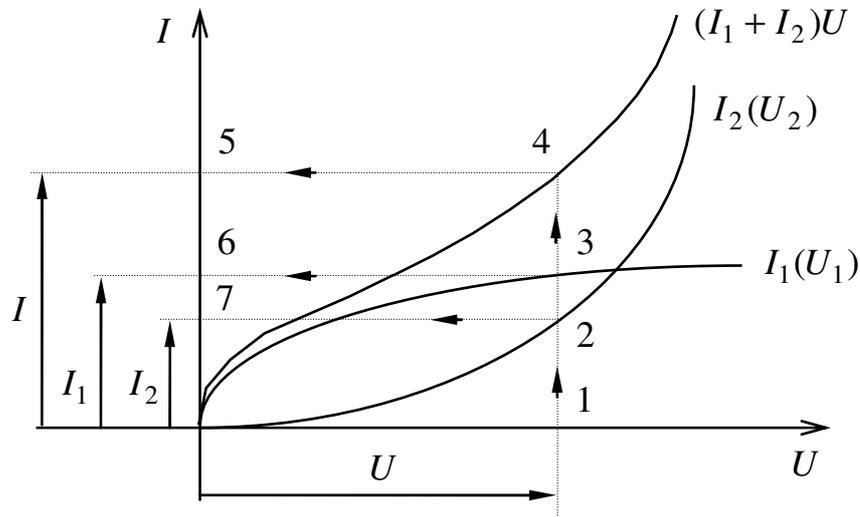


Рисунок 8 - Графический расчет

3. Определяем общий ток цепи I .

Для этого производим следующие построения.

1) Откладываем по оси напряжений величину U и получаем точку 1.

2) Восстанавливаем перпендикуляр из точки 1 до пересечения со вспомогательной кривой $(I_1 + I_2)U$, получаем точку 4 и одновременно точки 2 и 3.

3) Из точки 4 проводим линию параллельно оси напряжений до пересечения с осью токов, получаем точку 5. Точка 5 определяет общий ток I .

4. Определяем ток в первой параллельной ветви I_1 .

Для этого из точки 3 проводим линию параллельно оси напряжений до пересечения с осью токов, получаем точку 6. Точка 6 определяет ток I_1 .

5. Определяем ток во второй параллельной ветви I_2 .

Для этого из точки 2 проводим линию параллельно оси напряжений до пересечения с осью токов, получаем точку 7. Точка 7 определяет ток I_2 .

Таким же путем можно рассчитать электрическую цепь с любым числом параллельно включенных нелинейных элементов.

1.2.3.3 Смешанное соединение элементов

Произведем теперь расчет смешанной цепи, схема которой показана на рисунке 9.

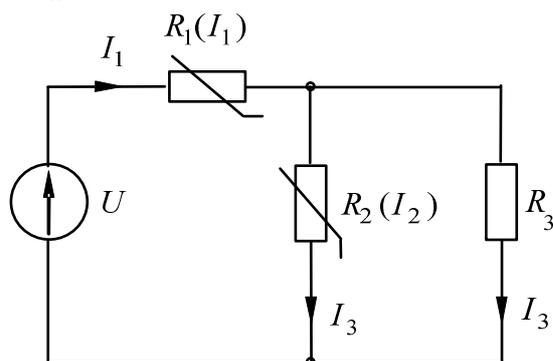


Рисунок 9 - Цепь со смешанным соединением элементов

Дано:

Входное напряжение U ; вольт-амперные характеристики элементов $I_1(U_1)$ и $I_2(U_2)$, сопротивление линейного элемента R_3 .

Найти:

Все токи, протекающие через элементы и напряжения на них.

Порядок расчета

1. Строим вольтамперные характеристики всех элементов цепи.

Для графического расчета нужно тщательно построить заданные вольтамперные характеристики в одном масштабе на одном графике, см. рисунок 10. Вольтамперная характеристика линейного элемента в виде прямой линии изображается здесь же в тех же масштабах.

2. Строим вспомогательную характеристику для параллельно соединенных элементов.

Элементы 2 и 3 имеют общее напряжение $U_2 = U_3 = U_{23}$, поэтому, задаваясь значениями напряжения U_{23} , суммируем соответствующие этим значениям токи I_2 и I_3 . В результате получаем вспомогательную кривую или характеристику $(I_2 + I_3)U_{23}$.

Характеристика $(I_2 + I_3)U_{23}$ является эквивалентной вольтамперной характеристикой двух элементов 2 и 3.

3. Строим вспомогательную характеристику для последовательного соединения элементов.

Мы имеем последовательное соединение двух элементов $R_1(I_1)$ и $R_{23}(I_2 + I_3)$ с соответствующими вольтамперными характеристиками $I_1(U_1)$ и $(I_2 + I_3)U_{23}$. Так как, при последовательном соединении токи

равны, то $I_1 = I_2 + I_3$. Задаемся рядом значений для тока I_1 и суммируем напряжения, соответствующие этим токам $U_1 + U_{23} = U$.

Получаем вспомогательный график $I_1(U) = (I_2 + I_3)U$.

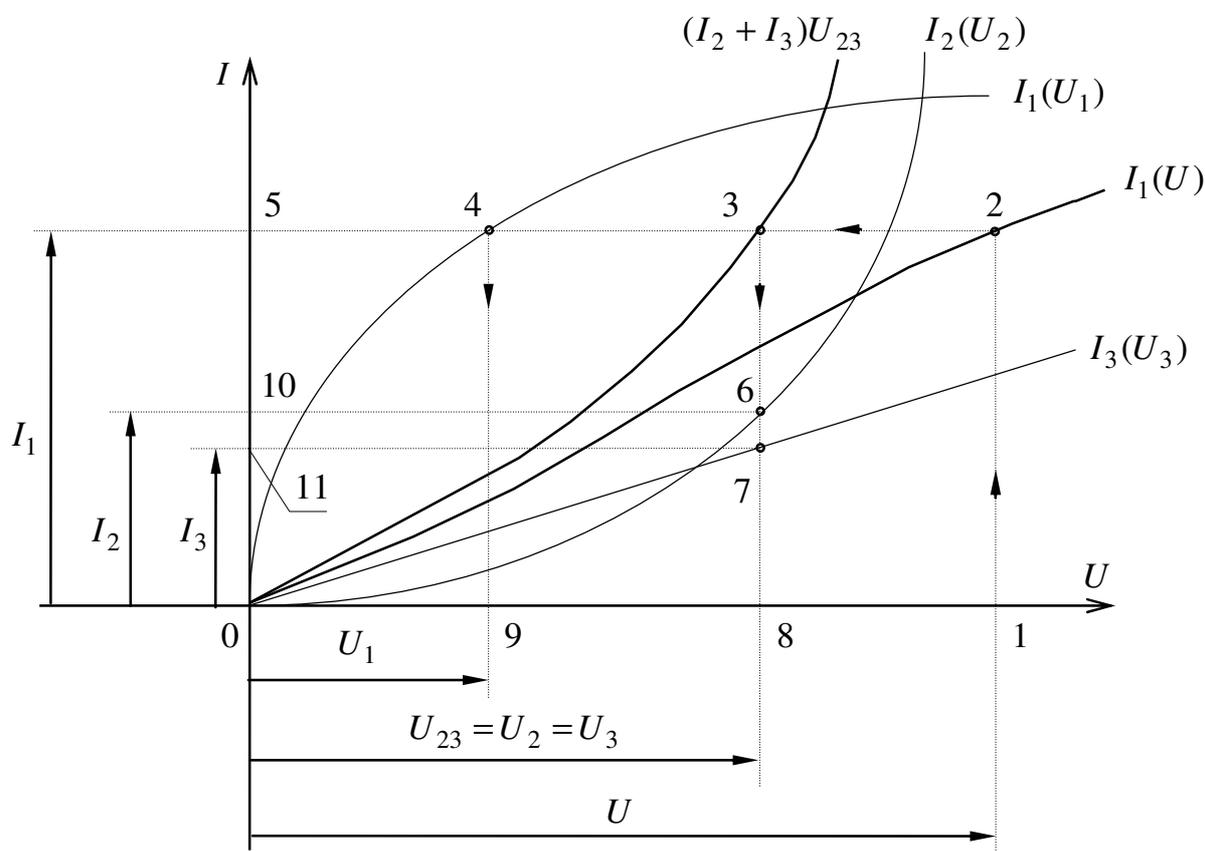


Рисунок 10 - Графический расчет

4. Определяем значение общего тока I_1 .

Для определения тока I_1 производим следующие графические построения.

1) Откладываем на оси напряжений заданное напряжение источника, питающего цепь - U . Получаем точку 1.

2) Восстанавливаем из точки 1 перпендикуляр к оси напряжений до пересечения со вспомогательной характеристикой $I_1(U)$. Получаем точку 2.

3) Из точки 2 проводим линию параллельно оси напряжений до пересечения с осью токов. Получаем точки 3, 4 и 5.

4) Точка 5 определяет по оси токов значение общего тока цепи I_1 .

5. Определяем значение напряжения $U_2 = U_3$.

Для этого опускаем перпендикуляр из точки 3 на ось напряжений и получаем точку 8. Точка 8 на оси напряжений соответствует искомому напряжению $U_2 = U_3 = U_{23}$. Одновременно, получаем здесь же точки 6 и 7.

6. Определяем токи в параллельных ветвях I_2 и I_3 .

Проводим линии параллельные оси напряжений из точек 6 и 7 до пересечения с осью токов. Получаем точки 10 и 11. Точки 10 и 11 на оси токов дают значения искомым токам I_2 и I_3 , соответственно.

7. Определяем напряжение на общем элементе U_1 .

Опускаем из точки 4 перпендикуляр на ось напряжений. Получаем точку 9. Точка 9 на оси, определяет величину напряжения на первом элементе U_1 .

1.2.3.4 Аналитические расчеты нелинейных цепей

Рассмотрим аналитический расчет нелинейной цепи на примере схемы, изображенной на рисунке 11.

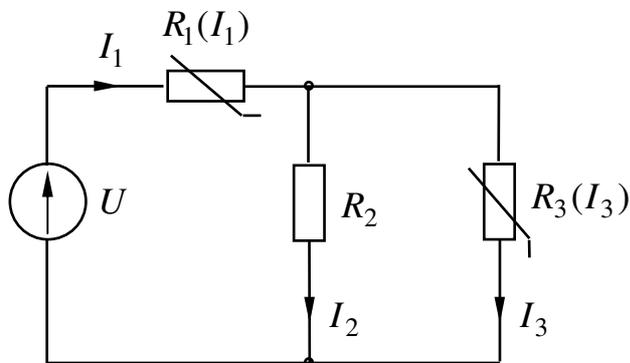


Рисунок 11 - Исходная схема

Дано:

Входное напряжение U ; вольтамперные характеристики элементов $R_1(I_1)$ и $R_3(I_3)$, сопротивление линейного элемента R_2 .

Найти:

Все токи протекающие через элементы и напряжения на них.

Порядок расчета

1 Строим в одинаковых масштабах вольтамперные характеристики нелинейных элементов цепи, см. рисунок 12.

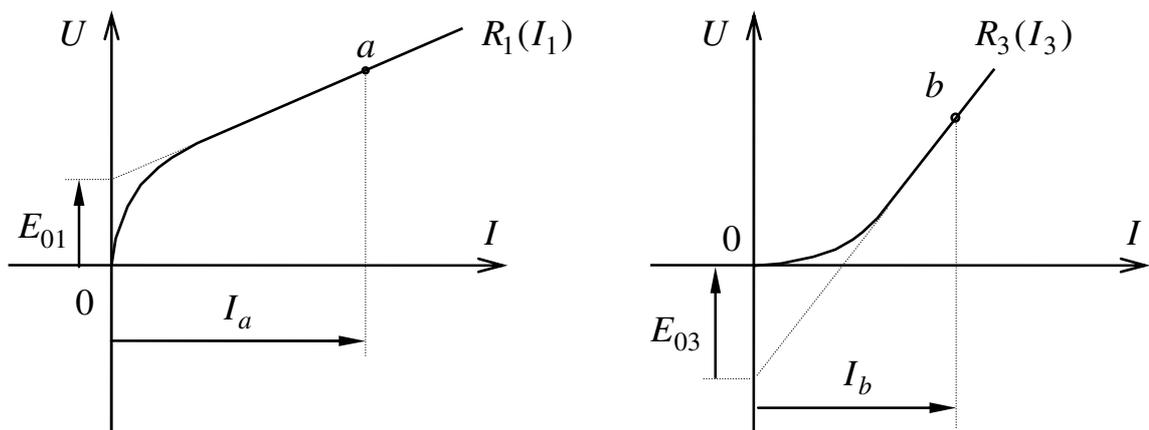


Рисунок 12 - Вольтамперные характеристики нелинейных элементов цепи

2. Заменяем реальные характеристики элементов их линейными схемами замещения.

Проводим касательные к прямолинейным участкам характеристик элементов.

Для первого элемента имеем:

$$U_1 = E_{01} + R_{Д1}I_1. \quad (6)$$

Эквивалентная схема этого элемента будет такой, какая показана на рисунке 13.

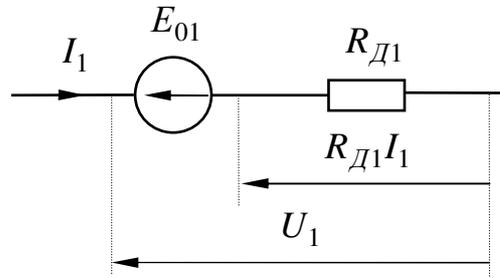


Рисунок 13 - Эквивалентная схема первого элемента

Для третьего элемента имеем

$$U_3 = -E_{03} + R_{Д3}I_3. \quad (7)$$

Эквивалентная схема этого элемента будет такой, какая показана на рисунке 14.

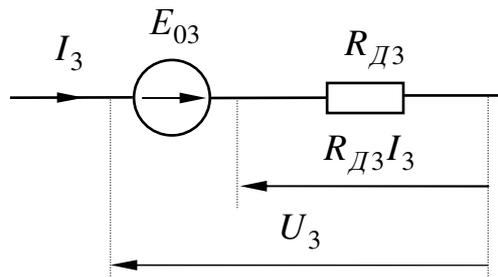


Рисунок 14 - Эквивалентная схема третьего элемента

3. Составляем эквивалентную расчетную схему.

Схема (рисунок 15) составлена применительно к расчетному методу узлового напряжения. Она соответствует заданной, только для таких режимов, при которых $I_1 \geq I_a$, а $I_3 \geq I_b$.

4. Определяем проводимости всех ветвей:

$$g_{Д1} = \frac{1}{R_{Д1}}; \quad g_2 = \frac{1}{R_2}; \quad g_{Д3} = \frac{1}{R_{Д3}}. \quad (8)$$

5. Определяем узловое напряжение U_0

$$U_0 = \frac{(U - E_{01})g_{Д1} + E_{03}g_{Д3}}{g_{Д1} + g_2 + g_{Д3}}. \quad (9)$$

6. Определяем токи в ветвях схемы:

$$I_1 = (U - E_{01} - U_0)g_{Д1} \geq I_a; \quad (10)$$

$$I_2 = (-U_0)g_2;$$

$$I_3 = (E_{03} - U_0)g_{Д3} \geq I_b.$$

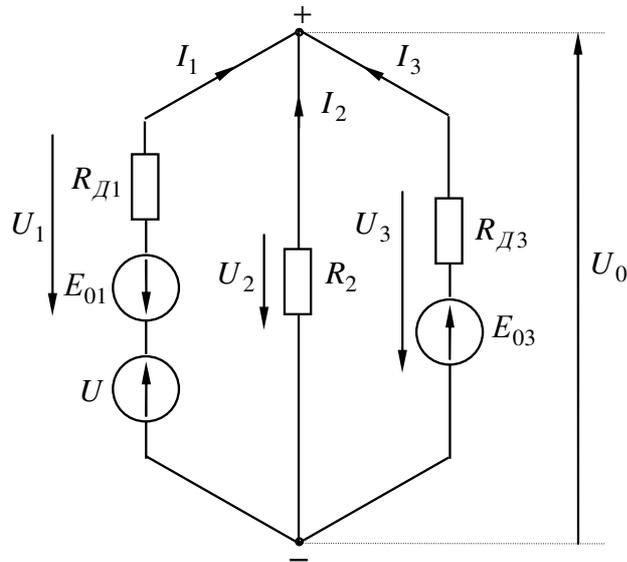


Рисунок 15 - Расчетная схема

7. Проверяем баланс токов по первому закону Кирхгофа.

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (11)$$

Баланс составлен для указанных выше режимов.

8. Проверяем результат расчета на баланс мощности.

$$P_{Г} = UI + E_{03}I_3,$$

$$P_{H} = R_{Д1}I_1^2 + R_2I_2^2 + R_{Д3}I_3^2 + E_{01}I_1, \quad (12)$$

$$P_{Г} - P_{H} = 0.$$

9. Находим напряжения на элементах цепи:

$$U - U_1 - U_0 = 0 \dots\dots U_1 = E_{01} + R_{Д1}I_1 = U - U_0;$$

$$U_2 + U_0 = 0 \dots\dots U_2 = R_2I_2 = -U_0; \quad (13)$$

$$U_3 + U_0 = 0 \dots\dots U_3 = -E_{03} + R_{Д3}I_3 = -U_0.$$

10. Проверяем напряжения на баланс напряжений.

$$U - U_1 - U_0 = 0. \quad (14)$$

Контрольные вопросы

1. Что называется нелинейной цепью?
2. Какие существуют методы анализа нелинейных цепей?
3. В чем заключается графический метод расчета нелинейных цепей постоянного тока?
4. Дайте определение дифференциального сопротивления нелинейного элемента.
5. Что понимают под графоаналитическим методом расчета нелинейных цепей?

Лекция 1.3 Цепи однофазного переменного синусоидального тока. Общие положения и определения

План лекции

- 1) Общие положения и определения. Источники синусоидальных ЭДС и токов.
- 2) Причины выбора синусоидальной формы тока и промышленной частоты.
- 3) Действующие и средние значения периодических ЭДС, напряжений и токов.
- 4) Векторные диаграммы.
- 5) Изображение синусоидальных функций времени комплексными числами (символический метод).

1.3.1 Общие положения и определения. Источники синусоидальных ЭДС и токов

До сих пор мы изучали электрические цепи постоянного тока, в которых токи и напряжения зависят только от сопротивлений и не зависят от времени. Пример подобной цепи приведен на рисунке 1.

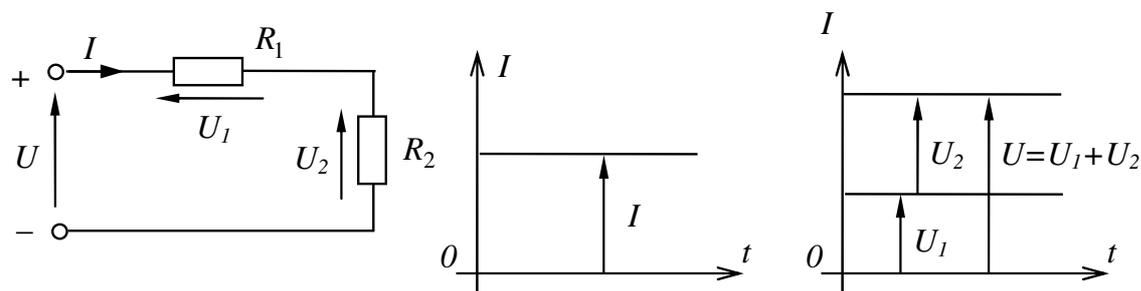


Рисунок 1 - Цепь постоянного тока

Теория переменных токов изучает электрические цепи, в которых токи и напряжения зависят и от величин сопротивлений и от времени. Пример такой цепи показан на рисунке 2.

Из огромного многообразия переменных токов, в промышленности, получили применение переменные синусоидальные токи.

Синусоидальным током называется такой ток, величина и направление которого изменяется в зависимости от времени по закону синуса.

Время T , в течение которого синусоида претерпевает полный цикл своего изменения называется периодом, см. рисунок 3.

Размерность периода - $[T] = [\text{сек}]$.

Число периодов в секунду определяет частоту переменного тока - $f = \frac{1}{T}$. Частота измеряется в герцах - $[f] = \left[\frac{1}{\text{сек}} \right] = [\text{Герц}] = [\text{Гц}]$. За один герц принимается частота тока в один период в одну секунду.

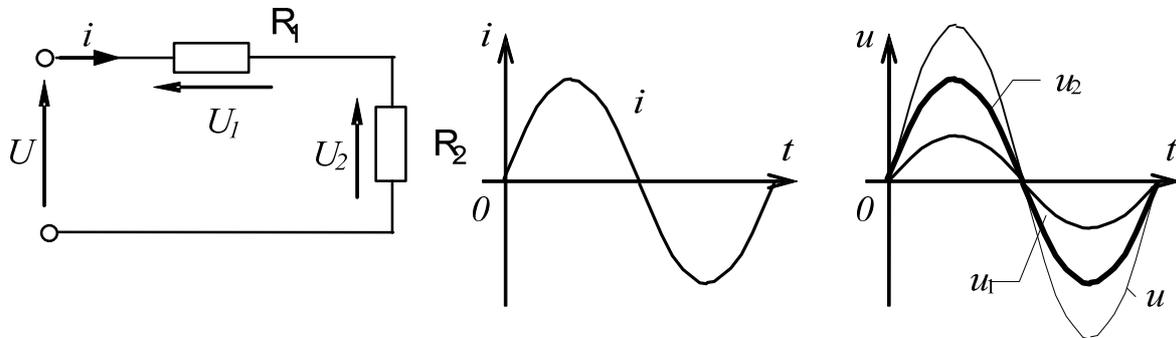


Рисунок 2 - Цепь переменного тока

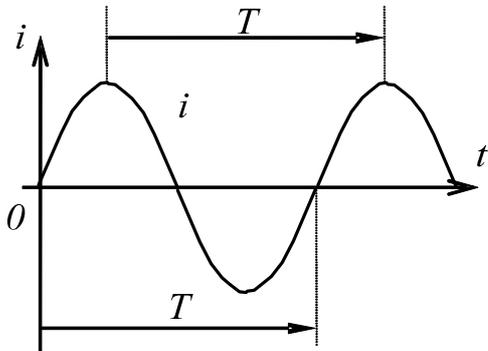


Рисунок 3 - Синусоидальный ток

Переменный синусоидальный ток вырабатывается в особых машинах, которые называются генераторами переменного тока. Эти генераторы работают на принципе закона электромагнитной индукции. Упрощенная схема такой машины приведена на рисунке 4, а. Там же, рисунок 4,б, показан общий вид генераторов на электростанции.

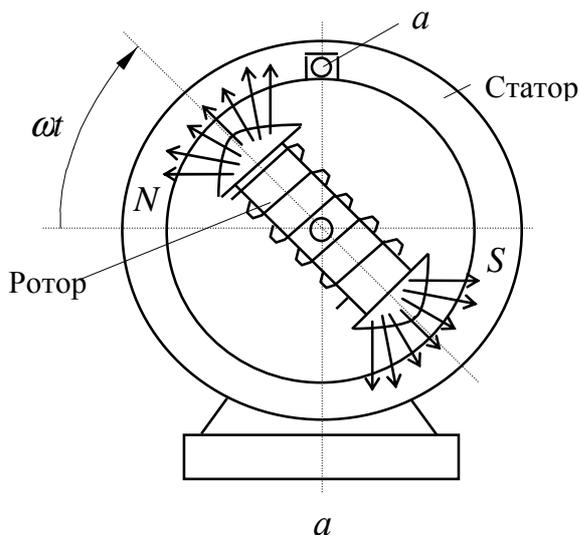


Рисунок 4 - Генератор переменного тока

Генератор состоит из неподвижного статора, на внутренней поверхности которого в особых пазах уложена обмотка. Обмотка статора на рисунке показана в виде одного витка - а. Внутри статора помещается ротор,

приводимый во вращение извне каким либо двигателем (например: паровой или гидротурбиной; двигателем внутреннего сгорания). Ротор представляет собой мощный электромагнит постоянного тока. Магнитное поле ротора, пересекая при вращении витки обмотки статора, наводит в ней синусоидальную ЭДС. Действительно, при вращении ротора, индукция магнитного поля в обмотке изменяется по синусоидальному закону

$$B = B_m \sin \omega t, \quad (1)$$

где B_m - амплитуда индукции поля в обмотке статора; ω - угловая частота вращения ротора генератора.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = \frac{2\pi pn}{60}, \quad (2)$$

где n - число оборотов ротора генератора в минуту;

p - число пар полюсов магнитного полюса ротора генератора. Для генератора, показанного на рисунке 3.4, $p = 1$.

ЭДС индуцируемая в проводнике обмотки статора определяется известным выражением

$$e = Blv, \text{ откуда} \quad (3)$$

$$e = B_m lv \sin \omega t = E_m \sin \omega t.$$

1.3.2 Причины выбора синусоидальной формы тока и промышленной частоты

В разных странах частота переменного тока стандартизована и несколько различна. Например, в европейских странах, в России частота $f = 50$ Гц, в США, Японии и ряде других стран $f = 60$ Гц.

Величина промышленной частоты выбрана по многим соображениям, главные из них:

- 1) отсутствие вредного действия на глаза человека мигания источников электрического освещения;
- 2) оптимальность габаритов электрических машин и аппаратов;
- 3) минимум потерь энергии на гистерезис и вихревые токи в сердечниках машин и аппаратов.

Примечание:

1) вес и габариты электрических машин обратно пропорциональны частоте питающего тока;

2) потери энергии на вихревые токи - $\Delta P_B = F_1(f^2)$, а потери энергии на гистерезис - $\Delta P_r = F_2(f)$.

В России угловая частота промышленного переменного тока равна:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ рад/сек.} \quad (4)$$

Период промышленного переменного синусоидального тока

$$T = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ сек.} \quad (5)$$

Частота постоянного тока равна нулю. Поэтому постоянный ток есть частный случай переменного тока, частота которого равна нулю, а период равен бесконечности.

Все генераторы переменного тока вырабатывают синусоидальные токи. Синусоидальность выбрана по многим причинам, главные из них:

1) из всех периодических кривых синусоида самая плавная (ее производная - также синусоидальная величина), последнее обеспечивает отсутствие динамических толчков при работе машин и перенапряжений в изоляции обмоток;

2) только синусоидальная форма токов дает вращающееся магнитное поле, что обеспечивает простое устройство двигателей переменного тока;

3) синусоида относительно просто записывается математически.

В общем случае синусоидальный ток может иметь вид, показанный на рисунке 5.

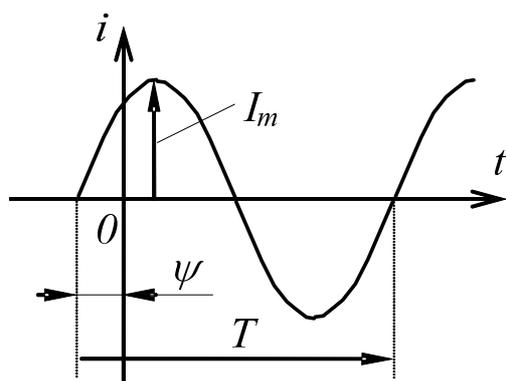


Рисунок 5 - Синусоидальный переменный ток

Мгновенное значение переменного тока можно записать в форме:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi), \quad (6)$$

где I_m - амплитуда синусоиды, амплитудой называют наибольшее мгновенное значение;

ω - угловая частота в рад/сек;

t - время в сек;

ψ - начальная фаза или фаза включения.

Она показывает, какое мгновенное значение синусоидальной величины имеет место в момент включения; $(\omega t + \psi)$ - аргумент синусоиды.

Таким образом, синусоида выражается через амплитуду и аргумент.

1.3.3 Действующее и среднее значения периодических ЭДС, напряжений и токов

1.3.3.1 Действующее значение периодических ЭДС, напряжений и токов

Переменный ток изменяется настолько быстро, что инертные измерительные приборы и электрические машины не успевают следовать за его мгновенными изменениями. Они улавливают некоторое усредненное значение переменного тока.

Поэтому обычно переменный ток сравнивают по действию с постоянным током. Отыскивают переменному току некоторый эквивалент в ви-

де постоянного тока. Этот постоянный ток и называется действующим значением переменного тока.

Сравним переменный ток с постоянным током по количеству выделяемого тепла на одном и том же сопротивлении.

Рисунок 6 иллюстрирует вывод нижеследующих формул.

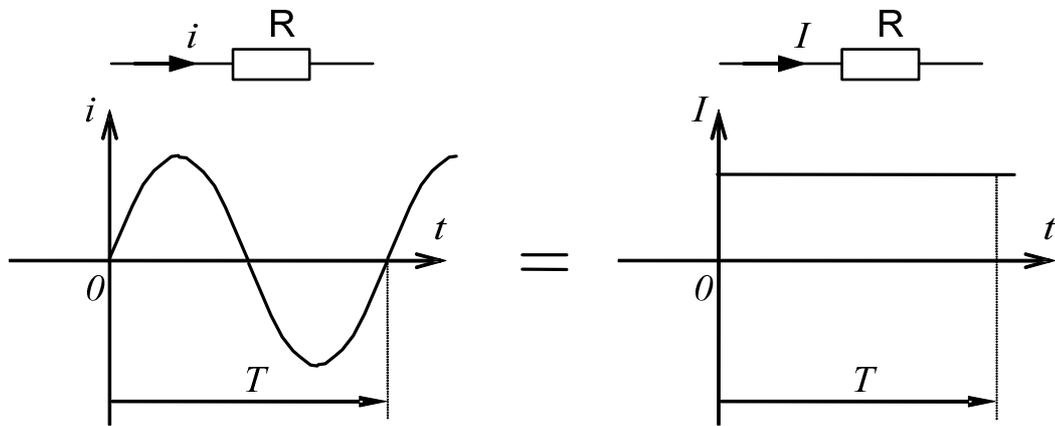


Рисунок 6 - Действующее значение переменного тока

Количество тепла, выделяемое на сопротивлении R за время T , переменным током i определяется так

$$Q_{\sim} = R \int_0^T i^2 dt. \quad (7)$$

Количество тепла, выделяемое на сопротивлении R за время T , постоянным током I определяется так

$$Q_{=} = RI^2T. \quad (8)$$

Постоянный ток I будет являться действующим значением переменного тока i , если их тепловое действие будет одинаково. Приравнявая выражения (7) и (8) получаем

$$R \int_0^T i^2 dt = RI^2T, \text{ откуда выражая значение } I, \text{ окончательно имеем}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (9)$$

Действующим значением переменного тока называется такой постоянный ток, который на том же сопротивлении и за то же время выделяет столько же тепла, что и данный переменный ток.

Обычно, время интегрирования T , принимают равным периоду переменного тока, поэтому действующее значение переменного тока равно среднеквадратичному значению его мгновенной величины.

Для напряжения, действующее значение будет равно:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} . \quad (10)$$

Выражения (9) и (10) позволяют найти действующие значения переменного тока или напряжения изменяющихся по кривой любой формы.

Определим действующее значение для синусоидального переменного тока.

Пусть $i = I_m \sin \omega t$. Тогда, согласно (9) имеем

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} . \quad (11)$$

Интеграл под знаком корня возьмем отдельно.

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos 2\omega t dt = \frac{1}{2} T .$$

Подставляя последнее значение в выражение (11), получим

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \frac{1}{2} T} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} .$$

Отсюда имеем действующие значения переменного тока и напряжения:

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m ; \\ U &= \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m . \end{aligned} \quad (12)$$

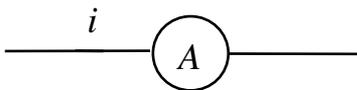
Или амплитуды тока и напряжения:

$$\begin{aligned} I_m &= \sqrt{2} \cdot I , \\ U_m &= \sqrt{2} \cdot U . \end{aligned} \quad (13)$$

Электрические машины, аппараты, измерительные приборы работают на действующих значениях. Рассмотрим два примера.

Пример 1

В цепи, см. рисунок 7, протекает ток, мгновенное значение которого равно $i = 100 \sin 314t$. Найти показания амперметра.



Решение:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m = 0,707 \cdot 100 = 70,7 \text{ А} .$$

Рисунок 7 - Определение показаний амперметра

Пример 2

В цепи, см. рисунок 8, показание вольтметра $V = 220$ В. Какое напряжение действует на изоляцию проводов?

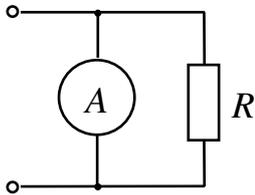


Рисунок 8 - Определение амплитуды напряжения

Решение:

$$U_m = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot V = \\ = 1,414 \cdot 220 = 311,08 \approx 311,1 \text{ В.}$$

1.3.3.2 Среднее значение синусоидального переменного тока

Для некоторых расчетов в электротехнике необходимо знать среднее значение переменного тока.

Средним значением переменного тока называется такой переменный ток, произведение которого на интервал времени, равен интегралу данного переменного тока за тот же интервал времени.

Вывод нижеследующих формул иллюстрируется рисунком 9.

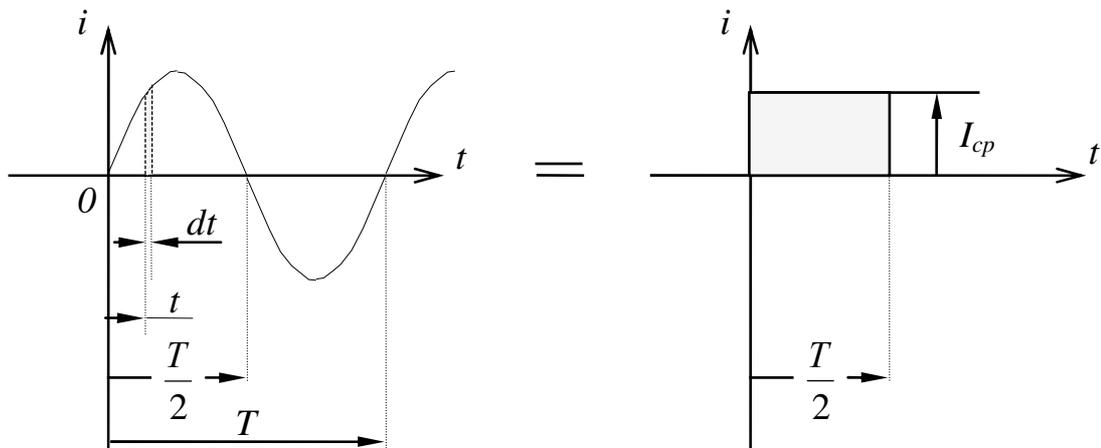


Рисунок 9 - Среднее значение переменного тока

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt .$$

(14)

Выражение (14) - среднее значение синусоидальной величины за полпериода. Если $i = I_m \sin \omega t$, то:

$$I_{cp} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{T\omega} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t d(\omega t);$$

$$I_{cp} = \frac{2I_m}{2\pi} (-\cos \omega t d) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2I_m}{2\pi} \left(-\cos \frac{\omega t}{2} + \cos \omega 0 \right);$$

$$I_{cp} = \frac{I_m}{\pi} (-\cos \pi + 1) = \frac{2I_m}{\pi}.$$

Окончательно имеем:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{cp} &= \frac{2I_m}{\pi} = 0,637 \cdot I_m; \\ E_{cp} &= \frac{2E_m}{\pi} = 0,637 \cdot E_m. \end{aligned}} \quad (15)$$

Часто, для того, чтобы характеризовать форму кривой и легко переходить от среднего значения к действительному, вводят коэффициент формы кривой - K_f .

Коэффициентом формы кривой называют отношение действующего значения к среднему.

$$K_f = \frac{\text{действующее значение}}{\text{среднее значение}}. \quad (16)$$

Для синусоидальной величины имеем,

$$K_f = \frac{E_m \pi}{\sqrt{2} \cdot 2E_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11. \quad (17)$$

Для треугольной формы кривой, $K_f = 1,15$.

Для прямоугольной формы (меандра), $K_f = 1,00$.

1.3.4 Векторные диаграммы

Способ анализа цепей синусоидального переменного тока основанный на представлении синусоиды равномерно вращающимся вектором называется – методом векторных диаграмм.

Предположим, что мы имеем равномерно вращающийся вектор, длина которого равна амплитуде синусоиды, а скорость вращения против стрелки часов, равна ωt , см. рисунок 10.

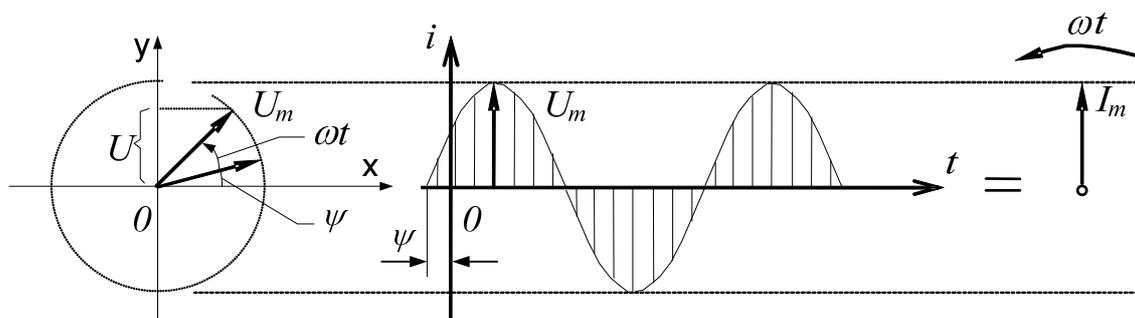


Рисунок 10 - Метод векторных диаграмм

Первоначальное положение вектора определяется углом ψ , который называется начальной фазой.

Тогда проекция данного вектора на ось u может быть записана таким образом

$$U = U_m \sin(\omega t + \psi). \quad (18)$$

Таким образом, каждой синусоидальной величине можно поставить в соответствие свой вращающийся вектор.

При действиях с несколькими синусоидами получаем несколько векторов, действия над которыми заменяют действия над синусоидальными токами или напряжениями.

Векторы - амплитуды вращаются с одной скоростью, так как частота всех токов и напряжений одна, а значит, относительно друг друга они неподвижны.

Поэтому, когда диаграммы используются для сложения действующих величин напряжений и токов то векторы не вращают.

Векторные диаграммы бывают двух видов:

- лучевые;
- топографические.

Лучевой диаграммой называется такая, в которой все векторы напряжений и токов цепи строят из одной точки.

Топографической диаграммой называется такая, на которой векторы напряжений пристраиваются друг к другу в том же порядке, в котором они действуют в электрической цепи.

Лучевые диаграммы на практике используются редко. Топографические диаграммы применяются очень широко, потому, что они позволяют определять напряжения между любыми точками и узлами электрической цепи.

Векторной диаграммой называется совокупность векторов, характеризующих процесс в электрической цепи.

Способ векторных диаграмм благодаря своей наглядности широко используется на практике.

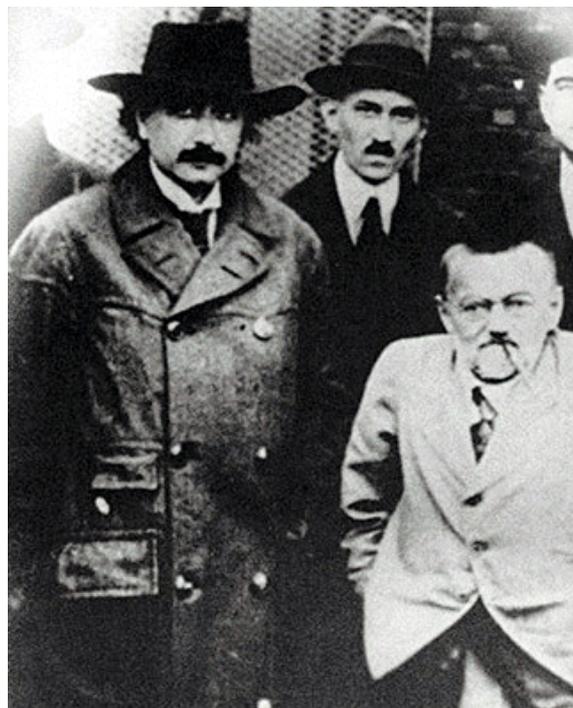
1.3.5 Изображение синусоидальных функций времени комплексными числами (символический метод)

Инженерный метод расчета электрических цепей переменного тока, основанный на применении комплексных чисел, называется символическим методом.

Этот метод предложил в 1892 г. американский ученый немецкого происхождения Чарлз Протеус Штейнмец. В нем гармонично сочетались выдающиеся качества математика, ученого-электротехника, инженера и

изобретателя. Он был шеф-электриком крупнейшего американского электротехнического концерна — фирмы «Дженерал Электрик Компани» (GEC), и его по праву называли «самым крупным оборудованием» фирмы.

Символический метод основан на замене геометрического сложения векторов, сложением алгебраическим комплексных чисел, изображающих эти вектора.



а

б

Рисунок 11 – На фото: а - Ч.П. Штейнмец; б - А. Эйнштейн (слева), Н. Тесла (в центре), Ч. Штейнмец (справа)

Согласно данному методу, вектора, отображающие синусоидальные токи или напряжения строятся в комплексной плоскости, рисунок 11.

Ось мнимых чисел

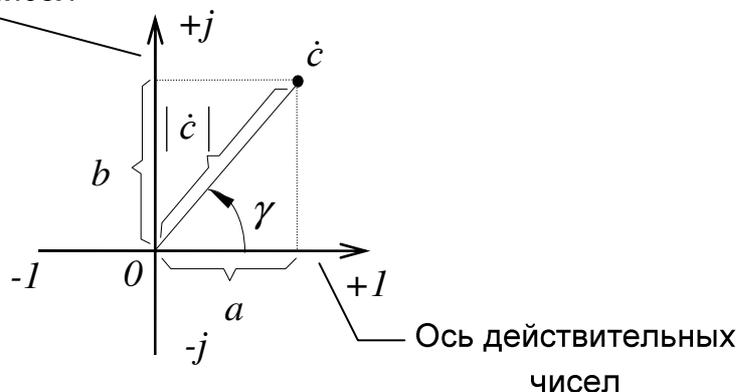


Рисунок 11 – Комплексная плоскость

Для удобства построения векторных диаграмм в электротехнике комплексная плоскость поворачивается в положительную сторону на угол 90° , как показано на рисунке 12.

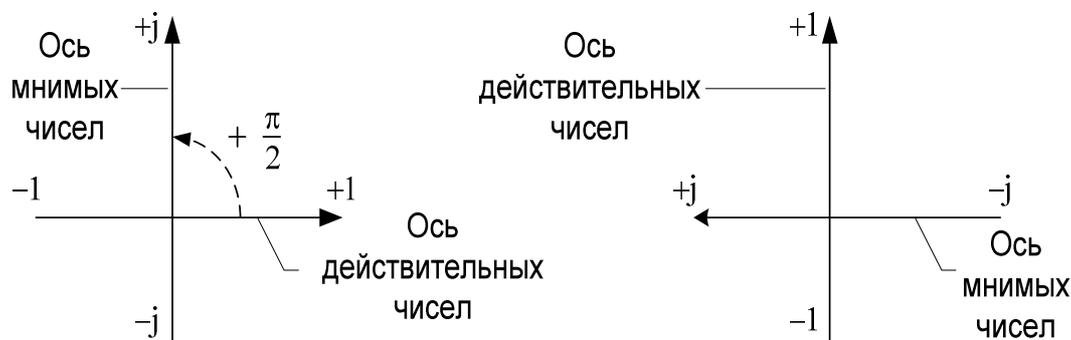


Рисунок 12 - Комплексная плоскость в электротехнике

Комплексное число это самый общий вид числа, все остальные числа являются частными случаями этого числа.

Комплексные числа существуют на комплексной плоскости. Комплексной плоскостью называется плоскость, ориентированная относительно двух взаимно перпендикулярных осей, см. рисунок 11.

Вертикальная ось называется осью мнимых чисел. На этой оси лежат все чисто мнимые числа.

Горизонтальная ось называется осью действительных чисел. На ней лежат все действительные числа.

Комплексные числа лежат между осями и имеют проекции и на действительную и на мнимую оси, как показано на рисунке 11.

Комплексным числом называют такое число, которое на комплексной плоскости определяется системой из двух чисел.

Комплексное число позволяет описать вектор его проекциями на оси комплексной плоскости.

Комплексное число может быть представлено в трех формах: алгебраической, тригонометрической и показательной.

Алгебраическая форма

$$\boxed{\dot{c} = a \pm jb}, \quad (19)$$

где \dot{c} - комплексное число. Оно обозначается точкой над символом;

a - действительная часть комплексного числа;

jb - мнимая часть комплексного числа.

Величина j - называется мнимой единицей или оператором поворота на 90° в положительную сторону. Справедливы соотношения:

$$j = \sqrt{-1}, \text{ или } j^2 = -1. \quad (20)$$

Тригонометрическая форма

$$\dot{c} = a \pm jb = |\dot{c}| \cos \gamma \pm j |\dot{c}| \sin \gamma, \quad (21)$$

где $|\dot{c}|$ - модуль комплексного числа \dot{c} ;

γ - аргумент комплексного числа \dot{c} .

Модуль комплексного числа \dot{c} , определяется таким образом

$$|\dot{c}| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (22)$$

Аргумент комплексного числа - γ , можно найти по выражению:

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}. \quad (23)$$

Справедливы так же соотношения:

$$a = |\dot{c}| \cos \gamma; \quad (24)$$

$$b = |\dot{c}| \sin \gamma.$$

Показательная форма

Известно, что $\dot{c} = a \pm jb = |\dot{c}| (\cos \gamma \pm j \sin \gamma)$, но согласно формуле

Эйлера: $\cos \gamma \pm j \sin \gamma = e^{\pm j\gamma}$, где $e = 2,718281828\dots$ - основание натуральных логарифмов.

Поэтому можно записать комплексное число в следующей форме:

$$\dot{c} = a \pm jb = |\dot{c}| e^{\pm j\gamma}. \quad (25)$$

Выражение (25) называется показательной формой записи комплексного числа.

1.3.5.1 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

При использовании комплексных чисел, все законы и методы расчета по форме не изменяются, но записываются в комплексном виде:

Закон Ома в символической форме:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}; \quad \dot{U} = \bar{Z}\dot{I}; \quad \bar{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}. \quad (26)$$

Первый закон Кирхгофа в символической форме

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} \dot{I}_i \right)_A = 0. \quad (27)$$

Второй закон Кирхгофа в символической форме

$$\sum_{i=1}^{i=n} \dot{E}_i + \sum_{k=1}^{k=m} \dot{U}_k = 0. \quad (28)$$

Основным преимуществом символического метода является то, что геометрические действия над векторами заменяются алгебраическими действиями над комплексами, изображающими эти вектора.

Контрольные вопросы

1. Однофазный синусоидальный ток, получение однофазного тока, Период, частота, угловая скорость (определение, обозначение, аналитическая связь между ними).
2. Основные соображения, по которым принят в промышленности переменный ток, изменяющийся по синусоидальной кривой.
3. Стандартная частота промышленного тока и причины, по которым она выбрана.
4. Мгновенное значение переменного тока (определение, обозначение, аналитические выражения и соответствующие графики).
5. Амплитудное значение переменного тока (определение и обозначение).
6. Действующее значение переменного тока любой формы кривой и синусоидальной (определение, вывод формул).

Лекция 1.4 Идеализированные линейные элементы однофазных цепей синусоидального тока

План лекции

- 1) Идеальный активный элемент.
- 2) Идеальный индуктивный элемент.
- 3) Идеальный емкостный элемент.

1.4.1 Идеальный активный элемент

Активное сопротивление в электрических схемах условно обозначается так, как показано на рисунке 1.

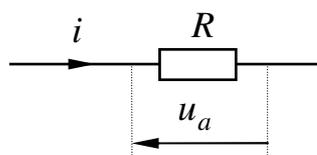


Рисунок 1 - Активное сопротивление

Идеальным активным сопротивлением R называется элемент цепи, в котором электрическая энергия преобразуется в тепловую энергию или полезную механическую работу. Идеальный активный элемент не имеет ни магнитных, ни электрических полей. Поэтому он не запасает внутри себя энергию.

Если по активному сопротивлению протекает синусоидальный переменный ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на нем будет

$$u_a = Ri = RI_m \sin \omega t = U_{ma} \sin \omega t, \quad (1)$$

где $U_{ma} = RI_m$ - амплитуда активного напряжения.

Графики колебаний тока и напряжения на активном элементе и векторная диаграмма, характеризующая данный элемент приведены на рисунке 2.

На идеальном активном элементе в любой момент времени напряжение, и ток совпадают по фазе, сдвиг фаз между ними равен нулю.

Мощность, потребляемая активным элементом от источника энергии, определится:

$$P_a = u_a i = RI_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = RI_m^2 \sin^2 \omega t. \quad (2)$$

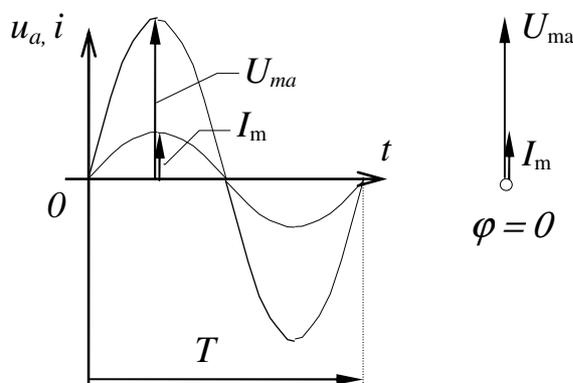


Рисунок 2 - Графики тока и напряжения на активном элементе

Данное выражение определяет закон колебания мощности на активном элементе цепи. Активная мощность всегда положительна. График, иллюстрирующий выражение (2) показан на рисунке 3.

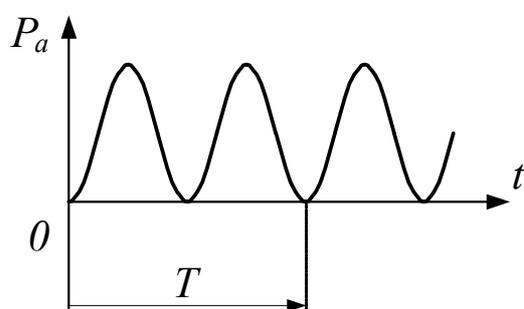


Рисунок 3 - График колебания мощности на активном элементе

С энергетической точки зрения, положительная мощность, это мощность, которая поступает из генератора в нагрузку, а отрицательная - та, которая возвращается обратно в генератор. В активном сопротивлении транспорт энергии односторонний. Односторонний транспорт энергии обеспечивает самую большую пропускную способность проводов электрических линий, следовательно, самый экономичный способ их использования. Активный

режим является самым энергетически выгодным и экономичным режимом работы цепи.

1.4.2 Идеальный индуктивный элемент

Индуктивность в электрических схемах условно обозначается так, как показано на рисунке 4.

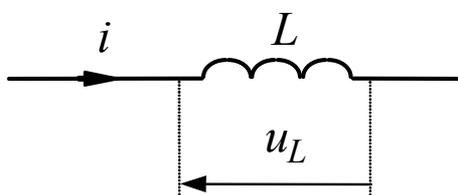


Рисунок 4 - Индуктивный элемент

Идеальной индуктивностью L , называют элемент цепи, в котором электрическая энергия полностью преобразуется в энергию магнитного поля. Идеальный индуктивный элемент не имеет нагрева и электрических полей.

Индуктивность препятствует всякому изменению тока в цепи.

Если по индуктивности протекает синусоидальный переменный ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на ней будет:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_m \sin \omega t) = LI_m \omega \cos \omega t = \omega LI_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$u_L = U_{mL} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (3)$$

где $U_{mL} = \omega LI_m$ - амплитуда напряжения на индуктивном элементе.

Графики колебаний тока и напряжения на индуктивности и векторная диаграмма, характеризующая данный элемент приведены на рисунке 5.

На идеальном индуктивном элементе в любой момент времени ток отстает от напряжения на угол 90° . Таким образом, здесь мы наблюдаем сдвиг между напряжением и током на угол $\frac{\pi}{2}$.

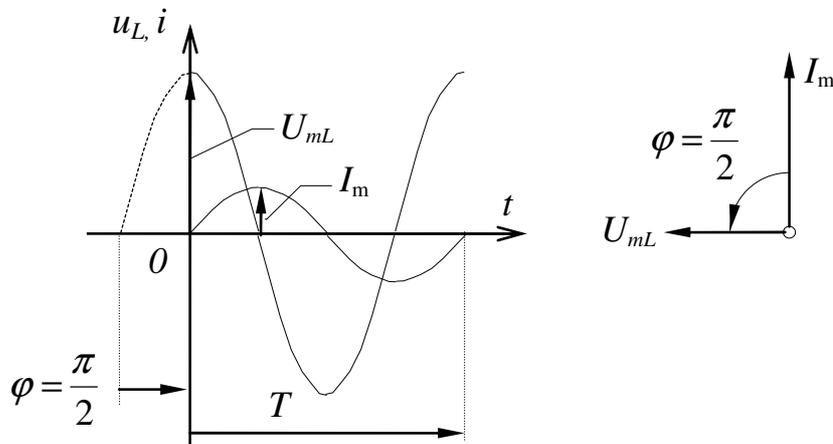


Рисунок 5 - Графики тока и напряжения на индуктивном элементе

Данный элемент запасает внутри себя энергию в виде магнитного поля. Энергия элемента определяется током, поэтому ток и отстает по фазе. В общем случае, в цепи переменного тока всегда отстает по фазе та величина, которая связана с энергией. На векторной диаграмме, та величина, которая встречается первой, при обходе против часовой стрелки, считается отстающей.

Мощность, потребляемая индуктивным элементом от источника энергии, определится:

$$P_L = u_L i = \omega L I_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = \omega L I_m^2 \sin 2\omega t. \quad (4)$$

Данное выражение определяет закон колебания мощности на индуктивном элементе цепи. График, иллюстрирующий выражение (4.4) показан на рисунке 6.

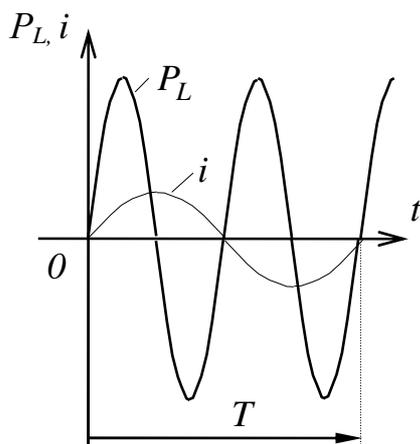


Рисунок 6 - График колебания мощности на индуктивном элементе

Из графика следует, что на идеализированной индуктивности мощность колеблется с удвоенной частотой. При этом мощность принимает как положительные, так и отрицательные значения.

За период изменения тока в цепи, поступление и возврат энергии в индуктивный элемент равны друг другу. Это значит, что, сколько энергии поступает в нагрузку, столько же и возвращается обратно в генератор.

Энергия здесь не тратится, она колеблется между генератором и нагрузкой, бесполезно загружая провода. Здесь существуют встречные потоки энергии, фактическое сечение проводов становится меньше геометрического, в результате пропускная способность линии снижается. В силовых цепях это вредный режим и от него приходится всеми средствами избавляться.

1.4.3 Идеальный емкостный элемент

Емкость (конденсатор) в электрических схемах условно обозначается так, как показано на рисунке 7.

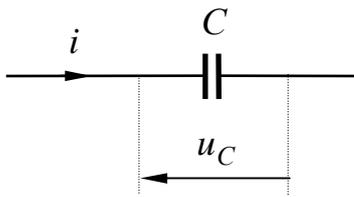


Рисунок 7 - Емкостной элемент

Идеальной емкостью C , называют элемент цепи, в котором электрическая энергия полностью преобразуется в энергию электрического поля. Идеальный емкостный элемент не имеет нагрева и магнитных полей.

Емкость препятствует всякому изменению напряжения в цепи.

Ток через емкость - это особый ток, поскольку он проходит по диэлектрику. Это так называемый ток смещения. Он определяется по закону Ома для диэлектрика:

$$i = C \frac{du_C}{dt}. \quad (5)$$

Если по емкости протекает синусоидальный переменный ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на ней будет

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{C\omega} \int \sin \omega t dt = \frac{I_m}{C\omega} (-\cos \omega t),$$

$$u_C = U_{mC} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6)$$

где $U_{mC} = \frac{1}{\omega C} I_m$ - амплитуда напряжения на емкостном элементе.

Графики колебаний тока и напряжения на емкости и векторная диаграмма, характеризующая данный элемент приведены на рисунке 8.

На идеальном емкостном элементе в любой момент времени напряжение отстает от тока на угол 90° . Таким образом, здесь мы наблюдаем сдвиг между напряжением и током на угол $-\frac{\pi}{2}$.

Данный элемент запасает внутри себя энергию в виде электрического поля.

Энергия элемента определяется напряжением, поэтому напряжение и отстает по фазе.

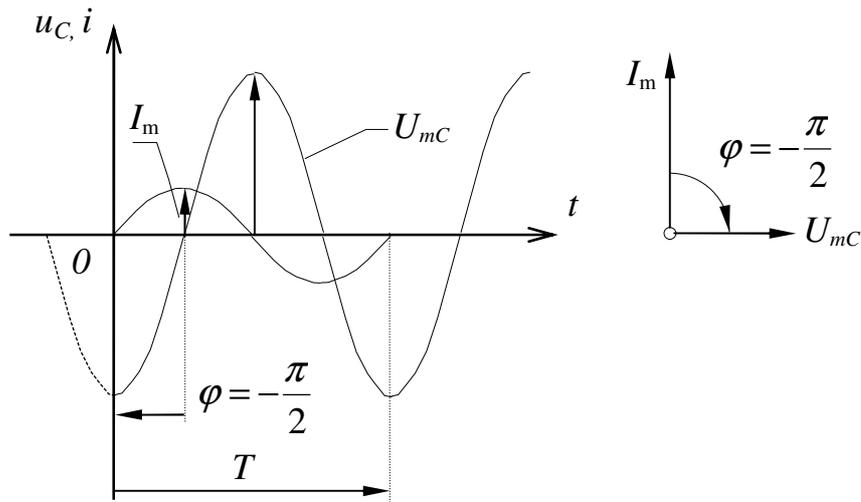


Рисунок 8 - Графики тока и напряжения на емкостном элементе

Мощность, потребляемая емкостным элементом от источника энергии, определится:

$$P_C = u_C i = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t \cdot I_m \sin \omega t = -\frac{1}{\omega C} I_m^2 \sin 2\omega t. \quad (7)$$

Данное выражение определяет закон колебания мощности на емкостном элементе цепи. График, иллюстрирующий выражение (7) показан на рисунке 9.

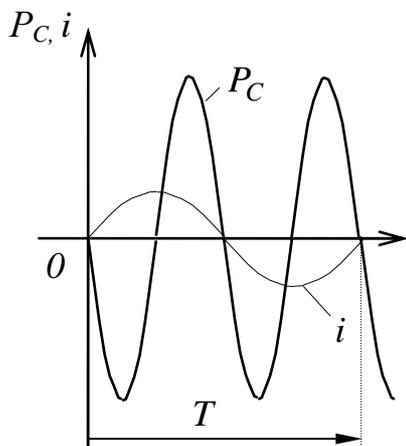


Рисунок 9 - График колебания мощности на емкостном элементе

Из графика следует, что на идеализированной емкости мощность колеблется с удвоенной частотой. При этом мощность принимает как положительные, так и отрицательные значения. За период изменения тока, поступление и возврат энергии в емкостном элементе равны друг другу. Это значит, что, сколько энергии поступает в нагрузку, столько же и возвращается обратно в генератор. Энергия здесь, как и в случае с индуктивностью, не тратится, она колеблется между генератором и нагрузкой, бесполезно загружая провода. Встречные потоки энергии приводят к снижению фактического сечения проводов, в результате пропускная

способность линии снижается.

Реактивная энергия на емкости противоположна по знаку реактивной энергии на индуктивности. Это означает, что емкость и индуктивность стремятся поглотить друг друга, скомпенсировать друг друга. Такая компенсация широко используется на практике, в частности для организации резонансных режимов.

Контрольные вопросы

1. Рассмотреть активный элемент цепи (дать определение ему, вывести аналитическое выражение для U_R при токе $i=Im \cdot \sin \omega t$, показать их на графике, начертить векторную диаграмму).
2. Рассмотреть индуктивный элемент (дать определение ему, вывести формулу для U_L при токе $i=Im \cdot \sin \omega t$, показать их на графике, начертить векторную диаграмму).
3. Рассмотреть емкостный элемент цепи (дать определение ему, вывести формулу для U_C при токе $i=Im \cdot \sin \omega t$, показать их на графике, начертить векторную диаграмму).

Лекция 1.5 Полная цепь переменного тока. Мощность в цепи переменного тока

План лекции

- 1) Закон Ома для полной цепи переменного тока, треугольник напряжений.
- 2) Треугольник сопротивлений и токов.
- 3) Мощность в цепи переменного тока.

1.5.1 Закон Ома для полной цепи переменного тока, треугольник напряжений

1.5.1.1 Закон Ома для Полной цепи переменного тока

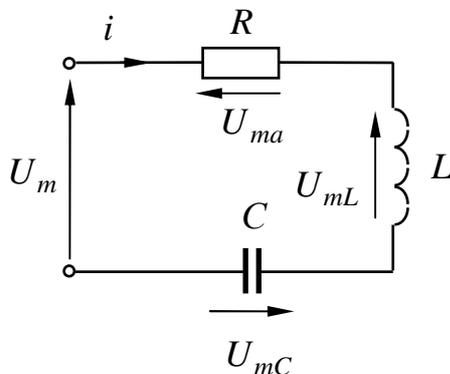


Рисунок 1 - Полная цепь переменного тока

Полной цепью переменного тока называется такая цепь, в которой активный, индуктивный и емкостной элементы соединены друг с другом последовательно.

Часто такие цепи называются - цепями *RLC*. Полная цепь изображена на рисунке 1.

Пусть на входе цепи действует синусоидальное напряжение $u = U_m \sin \omega t$, параметры цепи R , L и C известны. Найдем амплитудное I_m , действующее I и мгновенное i значения тока и сдвиг фаз - φ , между входным током и напряжением.

Для решения поставленной задачи построим векторную диаграмму для амплитуд, рисунок 2.

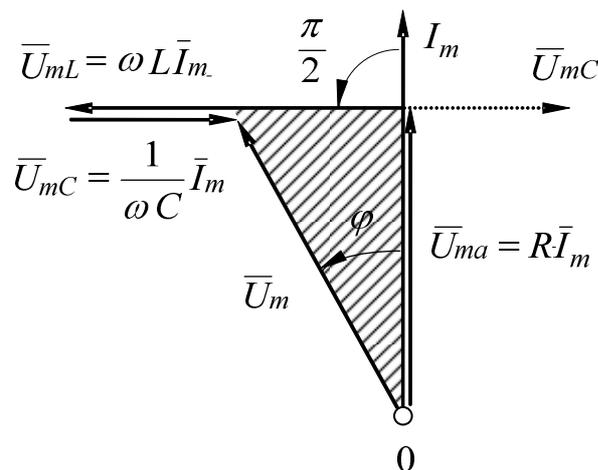


Рисунок 2 - Векторная диаграмма

Основное уравнение физического состояния цепи можно записать, используя второй закон Кирхгофа

$$\begin{aligned}\bar{U}_m &= \bar{U}_{ma} + (\bar{U}_{mL} - \bar{U}_{mC}) = R\bar{I}_m + \left(\omega L \bar{I}_m - \frac{1}{\omega C} \bar{I}_m \right); \\ \bar{U}_m &= R\bar{I}_m + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \bar{I}_m.\end{aligned}\quad (1)$$

Выражение (1) иллюстрируется заштрихованным треугольником на рисунке 2, который называют - треугольником напряжений.

Чтобы определить величину амплитуды тока, воспользуемся теоремой Пифагора для треугольника напряжения

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 I_m^2,$$

откуда получим закон Ома для цепи переменного тока в амплитудных значениях

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.\quad (2)$$

Разделив обе части выражения (2) на $\sqrt{2}$, получим закон Ома в действующих значениях

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.\quad (3)$$

Размерность выражение $\omega L - [\omega L] = \left[\frac{1}{\text{сек}} \cdot \text{сек} \cdot \text{Ом} \right] = [\text{Ом}]$, видим,

что данное выражение имеет размерность сопротивления, поэтому и называется - индуктивным реактивным сопротивлением. Оно обозначается:

$$x_L = \omega L = 2\pi fL.\quad (4)$$

Индуктивное сопротивление учитывает противодействующий характер ЭДС самоиндукции катушки, рисунок 3.

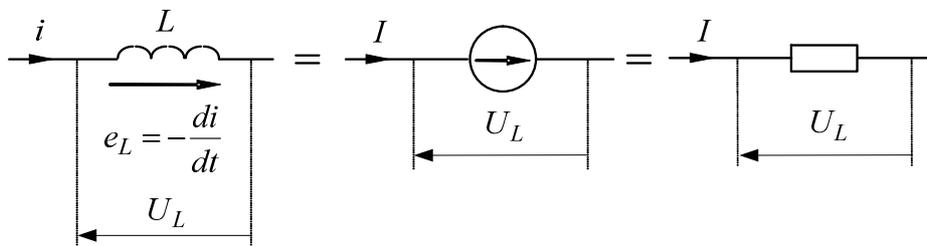


Рисунок 3 - Индуктивное сопротивление катушки

Индуктивное сопротивление катушки в действительности не существует. Реально, в цепи существует противодействующая току ЭДС катуш-

ки индуктивности. Ее влияние можно учесть, если ввести в расчеты сопротивление x_L реально существующей ЭДС самоиндукции катушки.

На преодоление сопротивления x_L затрачивается столько же напряжения источника, сколько идет его на преодоление ЭДС самоиндукции. Поскольку ЭДС самоиндукции есть реакция на ток, то индуктивное сопротивление называют реактивным сопротивлением катушки.

Величина x_L линейно зависит от частоты. Для постоянного тока $f = 0$, поэтому $x_L = 0$. Реактивное сопротивление индуктивности на постоянном токе не существует. Чем больше частота переменного тока, тем выше реактивное сопротивление катушки, при $f \rightarrow \infty$, $x_L \rightarrow \infty$.

Размерность выражения $\frac{1}{\omega C} \cdot \left[\frac{1}{\omega C} \right] = \left[\frac{1}{1/\text{сек} \cdot \text{сек}/\text{Ом}} \right] = [\text{Ом}]$, видим,

что и данное выражение имеет размерность сопротивления, поэтому оно называется - емкостным реактивным сопротивлением. Оно обозначается:

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC}. \quad (5)$$

Емкостное сопротивление учитывает противодействующий характер ЭДС емкости, см. рисунок 4.

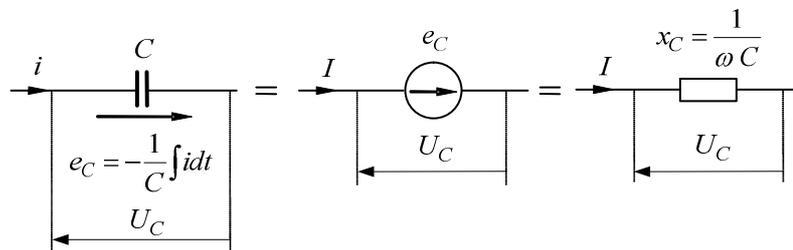


Рисунок 4 - Емкостное сопротивление

Емкостное сопротивление в действительности не существует. Реально существует противодействующая напряжению ЭДС поляризации диэлектрика конденсатора. Ее влияние можно учесть, если ввести в расчеты сопротивление x_C вместо реально существующей ЭДС поляризации диэлектрика конденсатора.

Величина x_C - обратно пропорциональна частоте. Для постоянного тока $f = 0$, поэтому $x_C = \infty$. Конденсатор постоянный ток не пропускает. Чем выше частота переменного тока, тем ниже величина реактивного емкостного сопротивления, при $f \rightarrow \infty$, $x_C \rightarrow 0$.

Общее реактивное сопротивление X , полученное для случая последовательного соединения катушки и конденсатора, будет

$$X = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}. \quad (6)$$

Реактивное сопротивление учитывает противодействующий характер ЭДС индуктивности и емкости.

Знак «минус» перед емкостным сопротивлением учитывает противоположное действие ЭДС индуктивности и емкости. Индуктивность и емкость, катушка и конденсатор - два «врага», две противоположности, стремящиеся побороть друг друга. Эта особенность катушек и конденсаторов широко используется на практике, например при построении схем, работающих в резонансных режимах.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (7)$$

Величина Z - называется полным сопротивлением цепи переменного тока.

В общем случае, Z больше чем R . Причина этого лежит в том, в цепи переменного тока сопротивление определяется противодействием не только материала проводников, но и противодействием ЭДС индуктивности и емкости.

Подставим (7) в (3), получим

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U}{Z}. \quad (8)$$

При использовании (8) корень всегда берется со знаком «плюс», так как амплитуды U_m и I_m всегда считаются положительными.

Сдвиг по фазе между входным током и напряжением определится из треугольника напряжения векторной диаграммы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\bar{U}_{mp}}{\bar{U}_{ma}} = \frac{U_{mL} - U_{mC}}{U_{ma}} = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m}{R I_m} = \frac{x_L - x_C}{R} = \frac{X}{R}. \quad (9)$$

Откуда

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{R} = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}. \quad (10)$$

Видим, что угол сдвига между током и напряжением зависит только от параметров цепи R , L , C и не зависит от величины токов и напряжений. Этот угол можно сознательно изменять, воздействуя на параметры цепи, что широко используется на практике, например в схемах фазовой компенсации.

1.5.1.2 Треугольники сопротивлений и тока

Если, как указано выше, все стороны треугольника напряжений разделить на величину тока, получим треугольник сопротивлений, рисунок 5.

Полное сопротивление всегда равно геометрической сумме активного и реактивного сопротивлений.

$$\bar{Z} = \bar{R} + \bar{X}. \quad (11)$$

Величины Z и R всегда положительны. Полное реактивное сопротивление X может быть как положительным, так и отрицательным. Для индуктивного характера цепи $X > 0$, так как $x_L > x_C$. А для емкостного характера цепи $X < 0$, поскольку $x_L < x_C$.

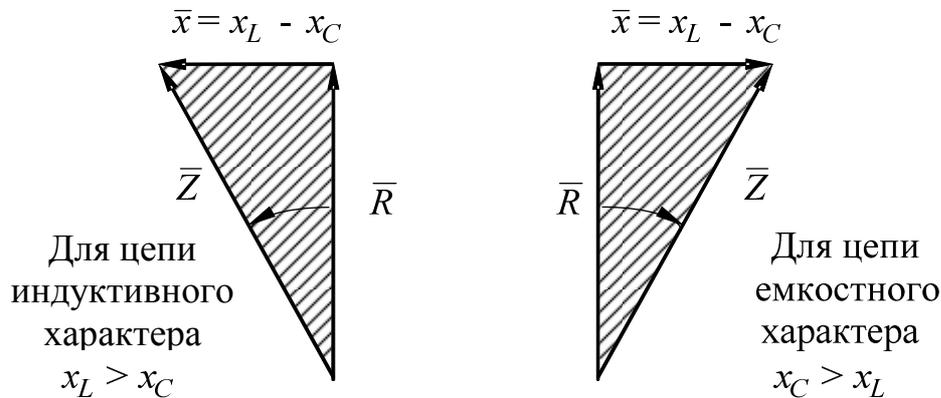


Рисунок 5.5 - Треугольник сопротивлений

Из треугольника сопротивлений имеем:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}; \quad \sin \varphi = \frac{X}{Z}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R};$$

$$R = Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi; \quad X = R \operatorname{tg} \varphi. \quad (12)$$

Выражения (12) используют, если заданы Z и $\cos \varphi$, а требуется определить R и X .

Чтобы выразить полное сопротивление комплексным числом, поместим треугольник сопротивления в комплексную плоскость.

$$\boxed{\bar{Z} = R \pm jX}. \quad (13)$$

Модуль полного сопротивления

$$\boxed{|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}}. \quad (14)$$

Аргумент комплекса сопротивления

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{x_L - x_C}{R}. \quad (15)$$

В тригонометрической и показательной формах, сопротивление можно записать таким образом:

$$\bar{Z} = |\bar{Z}| \cos \varphi \pm j |\bar{Z}| \sin \varphi = |\bar{Z}| \varepsilon^{\pm j \varphi} . \quad (16)$$

Если напряжение и ток не совпадают по фазе, то в параллельной цепи лучше раскладывать на составляющие не напряжение, а вектор тока, например, так, как показано на рисунке 6.

$$\bar{I} = \bar{I}_a + \bar{I}_p . \quad (17)$$

Общий ток всегда равен геометрической сумме активной \bar{I}_a и реактивной \bar{I}_p составляющих.

Активной составляющей называется часть общего тока, совпадающего по фазе с напряжением.

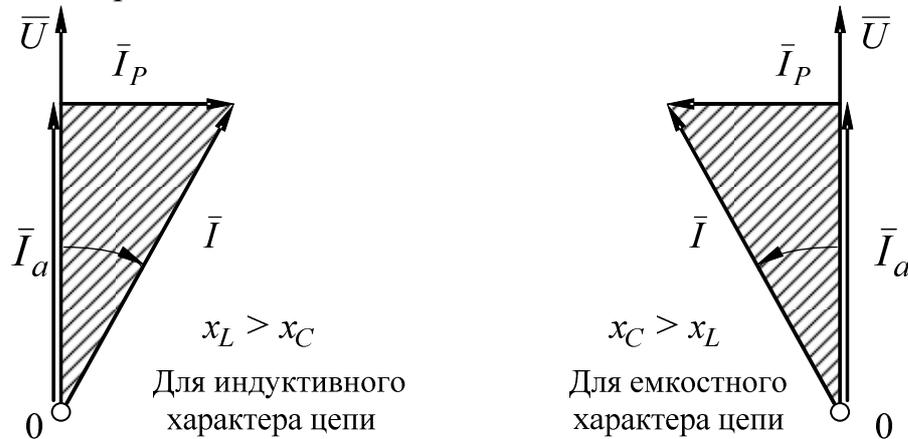


Рисунок 6 - Треугольник тока

Реактивным током называется часть общего тока, сдвинутая по фазе к напряжению на угол 90° в сторону отставания или опережения.

Чтобы выразить комплексным числом треугольник тока, поместим его в комплексную плоскость.

$$\boxed{\bar{I} = I_a \pm j I_p} . \quad (18)$$

Амперметр включенный в ветвь где протекает данный ток покажет величину равную модулю комплекса тока:

$$\boxed{|\dot{I}| = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}} . \quad (19)$$

Аргумент комплекса тока,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_p}{I_a} . \quad (20)$$

В тригонометрической и показательной формах, ток можно записать таким образом:

$$\dot{I} = |\dot{I}| \cos \varphi \pm j |\dot{I}| \sin \varphi = |\dot{I}| \varepsilon^{\pm j \varphi} . \quad (21)$$

1.5.3 Мощность в цепи переменного тока

Под *активной мощностью* P понимают среднее за значение мгновенной мощности p за период T :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt, \quad (22)$$

где u и i - мгновенные значения напряжения и тока на входе цепи, соответственно.

Если ток $i = I_m \sin \omega t$, то напряжение на участке цепи, в общем случае, сдвинуто по фазе на некоторый угол φ и может быть представлено в виде: $u = U_m \sin (\omega t + \varphi)$. Тогда

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m U_m \sin \omega t \cdot \sin (\omega t + \varphi) dt = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi = UI \cos \varphi, \quad (23)$$

где U и I - действующие значения напряжения и тока.

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени в виде теплоты на участке цепи в сопротивлении R . Действительно, произведение $U \cdot \cos \varphi = I \cdot R$; следовательно,

$$P = I^2 R. \quad (24)$$

Активная мощность измеряется в ваттах (Вт).

Под *реактивной мощностью* Q понимают величину:

$$Q = UI \sin \varphi. \quad (25)$$

Реактивную мощность принято измерять в вольт-амперах реактивных (Var). Если $\sin \varphi > 0$, то $Q > 0$, если $\sin \varphi < 0$, то и $Q < 0$.

Физически реактивная мощность Q характеризует собой ту энергию, которой обмениваются генератор и приемник и которая идет на создание в цепи магнитного и электрического полей.

Полная (кажущаяся) мощность потребляемая цепью составляет

$$S = UI. \quad (26)$$

Она измеряется в вольт-амперах (ВА).

Между S , Q и P существует соотношение

$$P^2 + Q^2 = S^2. \quad (27)$$

Графически эту связь можно представить в виде прямоугольного треугольника (рисунок 7). Он называется - треугольником мощности.

Чтобы выразить мощность комплексным числом, поместим треугольник мощности в комплексную плоскость.

$$\boxed{\bar{S} = P \pm jQ}. \quad (28)$$

Модуль полной мощности

$$\boxed{|\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (29)$$

$x_L > x_C$ $x_C > x_L$
 Для индуктивного Для емкостного
 характера цепи характера цепи

Рисунок .7 - Треугольник мощности

В тригонометрической и показательной формах, мощность можно записать таким образом:

$$\bar{S} = |\bar{S}| \cos \varphi \pm j |\bar{S}| \sin \varphi = |\bar{S}| e^{\pm j\varphi} \quad (31)$$

В расчетах, ток \hat{I} и напряжение \hat{U} получаются в виде комплексных чисел. В этом случае, комплекс мощности можно определять таким образом:

$$\bar{S} = \hat{U} \cdot \hat{I} = \bar{Z} \cdot \hat{I} \cdot \hat{I} = \bar{Z} | \hat{I} |^2 \quad (32)$$

Величина $\cos \varphi$ в выражении (23) называется – коэффициент мощности. Он показывает, какая часть полной мощности $S = U \cdot I$ идет на создание активной (полезной) работы. Поэтому $\cos \varphi$ часто называют электрический коэффициент полезного действия. Чем ближе коэффициент мощности к единице, тем экономичнее работа данной электрической цепи или устройства. Для повышения $\cos \varphi$ при эксплуатации электроустановок специальными средствами компенсируют реактивную мощность, стремясь ее уменьшить.

Другой путь повышения $\cos \varphi$ - это избегать режимов работы электрооборудования близких к чисто индуктивному или чисто емкостному характеру.

Контрольные вопросы

1. Вывести формулу закон Ома для цепи переменного тока и раскрыть физическую сущность его, сопоставляя с формулой закона Ома для цепи постоянного тока.
2. Средняя активная мощность (определение, вывод формулы).
3. Что такое коэффициент мощности (аналитическое выражение, определение; физическая сущность)?
4. Влияние коэффициента мощности на экономичность электропередачи.
5. Треугольники мощностей (получение треугольника, понятие об активной, реактивной и полной мощностях, единицы измерения их).
6. Приведите выражение для комплекса полной мощности в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.
7. Дайте определение комплекса полной мощности через ток и напряжение.
8. Приведите выражение для комплекса полной мощности выраженной через ток и сопротивление.

Лекция 1.6 Электрические резонансы

План лекции

- 1) Общая характеристика резонансных цепей.
- 2) Резонанс напряжений. Собственная частота цепи и способы ее регулирования. Волновое сопротивление и добротность контура. Избирательность и полоса пропускания. Частотные характеристики резонанса напряжений. Векторная диаграмма резонанса напряжений.
- 3) Резонанс токов. Собственная частота цепи при резонансе токов. Частотные характеристики резонанса токов. Векторная диаграмма резонанса токов.

1.6.1 Общая характеристика резонансных цепей.

Резонансные явления широко используются в технике. Известны резонансы: механические; химические; ядерные; электрические и др.

Режим резонанса наступает лишь тогда, когда частота внешних воздействий на систему равна собственной частоте системы, рисунок 1.

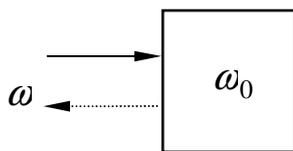


Рисунок 1 - Возникновение резонанса

$$\omega = 2\pi f = \omega_0 = 2\pi f_0, \quad (1)$$

где ω , f - угловая и временная частота внешних воздействий;

ω_0 , f_0 - угловая и временная собственная частота системы.

Собственной частотой системы называется число переливаний энергии внутри системы из одной формы в другую за одну секунду.

В электрических цепях энергия может сосредотачиваться в разных формах в двух элементах цепи: индуктивном (магнитное поле) и в емкостном (электрическое поле).

Таким образом, электрическая цепь обладает собственной частотой ω_0 , если в ней имеется хотя бы одна катушка и один конденсатор.

Катушка и конденсатор могут соединяться друг с другом только двумя способами:

- 1) последовательно;
- 2) параллельно.

В связи с этим имеется лишь два вида электрических резонансов: резонанс напряжений и резонанс токов.

Электрические резонансы сопровождаются резким увеличением напряжения или тока, т.е. являются усилительными электрических величин.

Любая пассивная электрическая цепь, находящаяся в режиме резонанса, характеризуется следующими свойствами:

1) входное реактивное сопротивление (для резонанса напряжений) или входная реактивная проводимость цепи (для резонанса токов) равны нулю

$$\boxed{X_{\text{вх}} = 0, \quad b_{\text{вх}} = 0}; \quad (2)$$

2) входное напряжение и ток совпадают по фазе

$$\boxed{\hat{U}_{\text{вх}} \hat{I}_{\text{вх}} = \varphi_{\text{вх}} = 0}; \quad (3)$$

3) входная мощность чисто активная

$$\boxed{\bar{S} = P_{\text{вх}} \pm jQ_{\text{вх}} = P_{\text{вх}} \pm j0 = P_{\text{вх}}}. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь каждый из резонансных режимов в отдельности.

1.6.2 Резонанс напряжений

Резонанс при последовательном соединении индуктивности и емкости называется резонансом напряжений. Схема резонансной цепи приведена на рисунке 2.

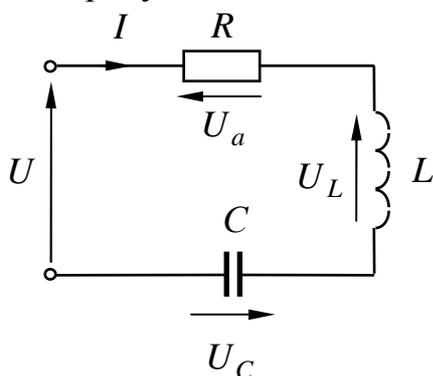


Рисунок 2 - Схема цепи в которой возможен резонанс напряжений

Дано:

входное напряжение $u = U_m \sin \omega t$; параметры цепи: R ; L ; C ; причем $R = \min \rightarrow 0$.

Найдем:

- 1) собственную частоту цепи ω_0 ;
- 2) полное входное сопротивление цепи при резонансе Z_p ;
- 3) ток в момент резонанса I_p ;
- 4) сдвиг фаз между током и напряжением в момент резонанса φ_p ;
- 5) напряжения на индуктивном U_{Lp} и емкостном U_{Cp} элементах цепи при резонансе.

На основании общего положения о резонансах, имеем

$$X_{\text{вх}} = x_L - x_C = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0; \quad \omega_0^2 LC = 1 \text{ откуда}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}. \quad (5)$$

Собственная частота электрической цепи зависит только от параметров цепи и не зависит от величины токов и напряжений.

Из выражения (6.5) следует, что собственную частоту ω_0 цепи можно сознательно регулировать:

- 1) изменением емкости C (переменный конденсатор);
- 2) изменением индуктивности (вариометр);

3) изменением емкости и индуктивности одновременно. Наиболее часто используются два первых способа, а последний способ - редко.

Определим входное сопротивление цепи при режиме резонанса.

$$Z_p = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = R, \text{ то есть } \boxed{Z_p = R = \min}. \quad (6)$$

При резонансе напряжений сопротивление цепи для резонансной частоты является чисто активным. Оно минимально и определяется только сопротивлением металла, из которого выполнена цепь.

Ток при резонансе найдется:

$$\boxed{I_p = \frac{U}{Z_p} = \frac{U}{R} = \max}. \quad (7)$$

При резонансе напряжений ток в цепи максимальный и имеет активный характер.

Действительно,

$$\varphi_p = \arctg \frac{x_L - x_C}{R} = \arctg \frac{0}{R} = 0, \quad \angle \dot{U}_{ex} \dot{I}_p = \varphi_p = 0. \quad (8)$$

При резонансе напряжений входное напряжение и ток совпадают по фазе.

Выясним, как обстоит дело с мощностью в цепи.

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ex} &= P_{ex} \pm jQ_{ex} = U_{ex} I_p \cos \varphi_p \pm jU_{ex} I_p \sin \varphi_p = \\ &= U_{ex} I_p \cos 0 \pm jU_{ex} I_p \sin 0, \end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{S}_{ex} = P_{ex} = U_{ex} I_p = U_{ex} \frac{U_{ex}}{R} = \frac{U_{ex}^2}{R}}. \quad (9)$$

При резонансе напряжений цепь потребляет от источника, через входные клеммы только активную энергию.

Внутри цепи имеется реактивная энергия, она колеблется между индуктивностью и емкостью, не выходя за пределы цепи.

Определим величины напряжений на элементах цепи.

$$U_{ex} = Z_p I_p = R \frac{U}{R} = U = U_a, \quad \boxed{U_{ex} = U = U_a}. \quad (10)$$

Напряжение на активном сопротивлении равно напряжению источника энергии, питающему цепь.

$$|\dot{U}_L| = |\dot{U}_C| = |\bar{x}_L I_p| = |\bar{x}_C I_p| \rightarrow \max. \quad (11)$$

Сопротивления при резонансе можно записать таким образом:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}, \text{ но } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ тогда}$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{C \frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{LC}{C^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \text{ Отсюда имеем}$$

$$\boxed{x_L = x_C = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho}. \quad (12)$$

Величина ρ - называется волновым или характеристическим сопротивлением контура.

Определим теперь отношения U_L или U_C к U .

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{x_L I_p}{R I_p} = \frac{x_C I_p}{R I_p} = \frac{\rho I_p}{R I_p} = \frac{\rho}{R} = Q. \quad (13)$$

Величина $Q = \rho/R$ - называется добротностью контура.

Добротность контура Q показывает во сколько раз при резонансе напряжение на индуктивности или емкости больше, чем напряжение, приложенное к цепи.

$$Q > 1, \text{ если } \rho = \sqrt{\frac{L}{C}} > R. \quad (14)$$

Наибольшее значение добротности, которое достижимы на практике 200 - 500.

Из полученных выражений следует, что основная особенность резонанса напряжений состоит в том, что напряжения на катушке и на конденсаторе по абсолютной величине равны друг другу и могут значительно превышать напряжение источника, питающего цепь.

$$\boxed{|\dot{U}_L| = |\dot{U}_C| \gg |\dot{U}|}. \quad (15)$$

Векторная диаграмма резонанса напряжений представлена на рисунке 3. На нем \dot{U}_K - напряжение на катушке индуктивности, состоящее из реактивного напряжения \dot{U}_L и активного сопротивления проводов катушки \dot{U}_a , которые определяют на практике общее активное сопротивление цепи.

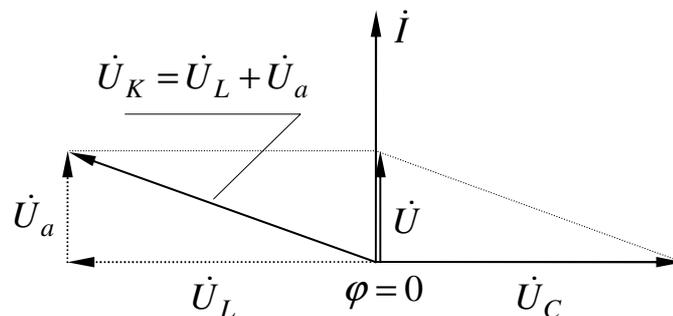


Рисунок 3 - Векторная диаграмма резонанса напряжений

Частотные характеристики цепи называются функциональные зависимости электрических величин, характеризующих цепь, от частоты.

Вид основных частотных характеристик для резонанса напряжений, представлен на рисунке 4.

Можно доказать, что все кривые имеют параболический характер.

Из графика следует, что сопротивление цепи для резонансной частоты минимально, а ток максимальный.

Характер зависимости тока от частоты показывает, что цепь обладает «избирательными свойствами».

Под избирательными свойствами понимают способность цепи резко изменять свое сопротивление или проводимость для определенных значений частоты.

Избирательные свойства широко используют в устройствах радиотехники и системах связи.

Видим, что чем больше величина добротности цепи, тем острее резонансная кривая, тем лучше «избирательность цепи».

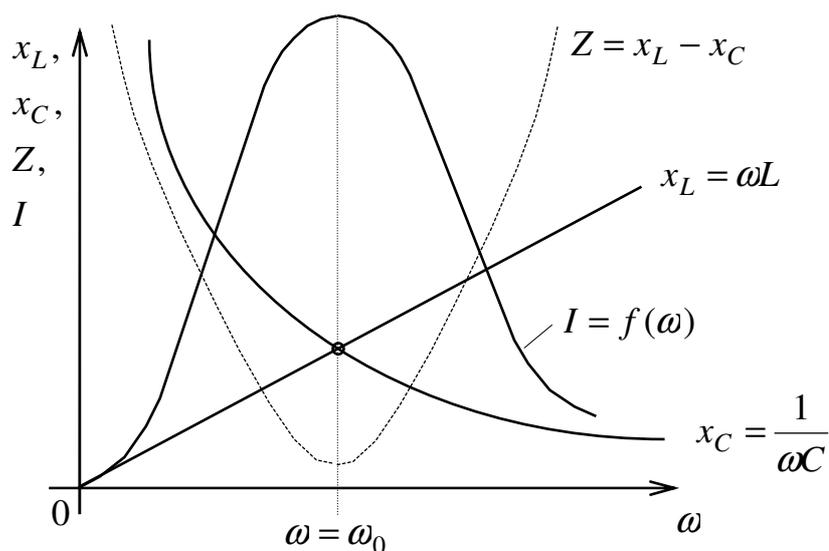


Рисунок 4 - Частотные характеристики при резонансе напряжений

На резонансной частоте цепь носит чисто активный характер, ток и напряжение совпадают по фазе.

На частотах выше резонансной характер цепи становится индуктивным, и ток отстает от напряжения. Таким образом, в резонансных цепях наблюдается явление опрокидывания фазы. Фаза тока из опережающей, становится отстающей и наоборот.

В силовых промышленных цепях опрокидывание фазы опасное явление. Оно может вызвать изменение направления вращения двигателей,

что во многих технологических процессах недопустимо и приводит к аварийному режиму.

Большой ток, потребляемый цепью в момент резонанса, ограничивает применения данного режима. Обычно по схеме резонанса напряжений строятся выходные контуры радиопередатчиков, мощных генераторов высокой частоты для высокочастотной закалки, плавки и нагрева.

1.6.3 Резонанс токов

Резонанс при параллельном соединении индуктивности и емкости называется резонансом токов. Схема цепи с резонансом токов показана на рисунке 5.

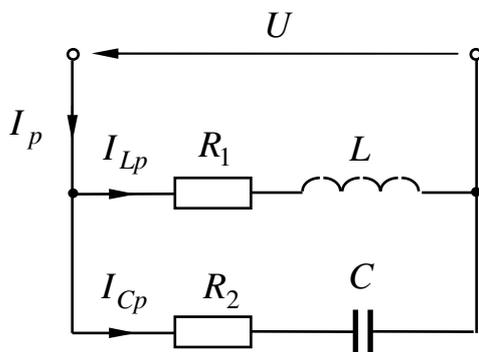


Рисунок 5 - Схема цепи в которой возможен резонанс токов

Дано:

входное напряжение $u = U_m \sin \omega t$; параметры цепи: R_1 ; R_2 ; L ; C ; причем $R_1 \approx R_2 \rightarrow 0$.

Найдем:

- 1) собственную частоту цепи ω_0 ;
- 2) полную входную проводимость цепи при резонансе Y_p ;
- 3) полное входное сопротивление цепи при резонансе Z_p ;
- 4) входной ток в момент резонанса I_p ;
- 5) токи в индуктивной I_{Lp} и емкостной I_{Cp} ветвях при резонансе;
- 6) сдвиг фаз между током и напряжением в момент резонанса φ_p ;
- 7) входную мощность в момент резонанса S_p .

Полные сопротивления ветвей схемы в комплексной форме можно записать так:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jx_1 = R_1 + j\omega L; \quad \dot{Z}_2 = R_2 - jx_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C}. \quad (16)$$

Проводимости ветвей будут такими:

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jx_1} = \frac{R_1 - jx_1}{R_1^2 + x_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + x_1^2} - j\frac{x_1}{R_1^2 + x_1^2} = g_1 - jb_1;$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2} = \frac{1}{R_2 - jx_2} = \frac{R_2 + jx_2}{R_2^2 + x_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + x_2^2} + j\frac{x_2}{R_2^2 + x_2^2} = g_2 + jb_2. \quad (17)$$

Полная входная проводимость цепи при параллельном соединении ветвей является суммой проводимостей отдельных ветвей

$$\bar{Y} = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = g + jb = (g_1 + g_2) + j(b_2 - b_1) \text{ или}$$

$$\bar{Y} = g + jb = \left(\frac{R_1}{R_1^2 + x_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + x_2^2} \right) + j \left(\frac{x_2}{R_2^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{R_1^2 + x_1^2} \right). \quad (18)$$

Найдем собственную частоту цепи. На основании общего положения о резонансах, имеем

$$b = \frac{x_2}{R_2^2 + x_2^2} - \frac{x_1}{R_1^2 + x_1^2} = 0, \text{ откуда } x_2(R_1^2 + x_1^2) - x_1(R_2^2 + x_2^2) = 0. \quad (19)$$

Если учесть (6) в (18), то получим:

$$\frac{1}{\omega_0 C} (R_1^2 + \omega_0^2 L^2) - \omega_0 L \left(R_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} \right) = 0;$$

$$R_1^2 + \omega_0^2 L^2 - \omega_0^2 LC \left(R_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} \right) = 0;$$

$$R_1^2 + \omega_0^2 L^2 - \omega_0^2 LCR_2^2 - \frac{L}{C} = 0;$$

$$\omega_0^2 LC \left(\frac{L}{C} - R_2^2 \right) - \left(\frac{L}{C} - R_1^2 \right) = 0;$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}}, \quad (20)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - волновое сопротивление цепи.

Таким образом, и здесь, при резонансе токов, собственная частота цепи зависит только от параметров цепи и от схемы их соединения и совершенно не зависит ни от токов, ни от напряжений.

Регулирование собственной частоты производится теми же способами, что и при резонансе напряжений.

$$\text{Если считать, что } R_1 \approx R_2 \rightarrow 0, \text{ то } \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}. \quad (21)$$

Собственная частота при резонансе токов, в случае равенства $R_1 \approx R_2 \rightarrow 0$ близка к собственной частоте при резонансе напряжений.

В момент резонанса входная проводимость будет

$$\bar{Y}_p = g = \frac{R_1}{R_1^2 + x_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + x_2^2}.$$

Так как $x_1 \gg R_1 \approx R_2 = R \rightarrow 0$; $x_2 \gg R_2 \approx R_1 = R \rightarrow 0$, то

$$\bar{Y}_p = \frac{R}{x_{1p}^2} + \frac{R}{x_{2p}^2}. \quad (22)$$

Ранее мы определили, что

$$x_{1p} = x_{2p} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (23)$$

Тогда получаем:

$$Y_p = \frac{R}{\rho^2} + \frac{R}{\rho^2} = 2 \frac{R}{\rho^2}, \text{ или окончательно } \boxed{Y_p = 2 \frac{R}{\rho^2}}. \quad (24)$$

Соответственно входное сопротивление будет

$$\boxed{Z_p = \frac{1}{Y_p} = \frac{\rho^2}{2R}}. \quad (25)$$

Поскольку, активные сопротивления ветвей считаются малыми, то

$$\boxed{Y_p = 2 \frac{R}{\rho^2} \Big|_{R \rightarrow 0} = \min \rightarrow 0}, \quad \boxed{Z_p = \frac{\rho^2}{2R} \Big|_{R \rightarrow 0} = \max \rightarrow \infty}. \quad (26)$$

Таким образом, при резонансе токов входная проводимость цепи стремится к нулю, а входное сопротивление к бесконечности.

Определим входной ток всей цепи

$$\boxed{I_p = UY_p = \frac{U}{Z_p} = U \frac{2R}{\rho^2} \Big|_{R \rightarrow 0} = \min \rightarrow 0}. \quad (27)$$

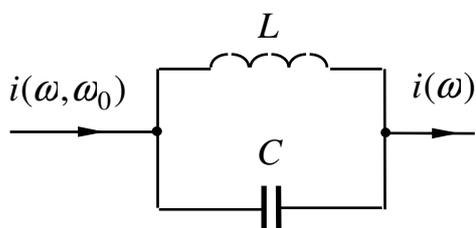


Рисунок 6 - Схема фильтра на резонансе токов

При резонансе токов входной ток предельно мал, так как сопротивление цепи стремится к бесконечности.

Это свойство широко используется на практике - резонанс токов является заградительным фильтром, непрозрачной преградой, пробкой для

токов резонансной частоты, рисунок 6.

Найдем теперь токи, протекающие в ветвях схемы в момент резонанса.

Поскольку $g_1 \rightarrow 0$ и $g_2 \rightarrow 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{Lp} &= U\bar{Y}_{1p} = U(g_1 - jb_1) = -jUb_1; \\ \dot{I}_{Cp} &= U\bar{Y}_{2p} = U(g_2 + jb_2) = jUb_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Реактивные проводимости будут равны:

$$b_1 = \frac{x_1}{R_1^2 + x_1^2} = \frac{1}{x_{1p}} = \frac{1}{\rho};$$

$$b_2 = \frac{x_2}{R_2^2 + x_2^2} = \frac{1}{x_{2p}} = \frac{1}{\rho}. \quad (29)$$

Так как $x_{1p} = x_{2p} = \rho \gg R_1 \approx R_2 = R \rightarrow 0$, то получим:

$$\boxed{\dot{i}_{Lp} = -j \frac{U}{\rho}}; \quad \boxed{\dot{i}_{Cp} = j \frac{U}{\rho}}. \quad (30)$$

Токи при резонансе равны по абсолютной величине и противоположны по фазе.

Выражения (30) получены в предположении, что активные сопротивления ветвей равны нулю. При этом общий входной ток цепи, равный сумме токов текущих в ветвях получится

$$\dot{i}_p = \dot{i}_{Lp} + \dot{i}_{Cp} = U \frac{2R}{\rho} = -j \frac{U}{\rho} + j \frac{U}{\rho} = \min \rightarrow 0.$$

В действительности, так как $R_1 \approx R_2 \neq 0$, то общий ток существует, но весьма малой величины.

Выясним, как относятся токи ветвей к входному току.

$$\left| \frac{\dot{i}_{Lp}}{\dot{i}_p} \right| = \left| \frac{\dot{i}_{Cp}}{\dot{i}_p} \right| = \frac{U \rho^2}{\rho U 2R} = \frac{\rho}{2R} = Q, \quad (31)$$

где Q - добротность контура.

На основании полученных выражений можно сформулировать главное свойство резонанса токов.

При резонансе токов, токи в ветвях равны по абсолютной величине, противоположны по фазе и могут во много раз превышать входной ток цепи.

Следовательно,

$$\left| \dot{i}_{Lp} \right| = \left| \dot{i}_{Cp} \right| \gg \left| \dot{i}_p \right|. \quad (32)$$

Определим фазовый сдвиг на входе цепи.

$$\boxed{\varphi_p = \arctg \frac{b_p}{g_p} = \arctg \frac{0}{g_p} = 0}. \quad (33)$$

Входной ток и напряжение при резонансе токов совпадают по фазе.

$$\boxed{\cos \varphi_p = \cos 0 = 1 = \max}. \quad (34)$$

Коэффициент мощности на входе цепи при резонансе токов максимален и равен единице. Следовательно, цепь работает в самом экономичном режиме.

Входная мощность цепи при резонансе будет

$$\dot{S}_p = P_p + jQ_p = UI_p \cos \varphi_p + jUI_p \sin \varphi_p = UI_p \cdot 1 + jUI_p \cdot 0 = UI_p;$$

$$\boxed{\dot{S}_p = P_p = U \cdot I_p = U^2 \frac{2R}{\rho^2}}, \text{ поскольку } \dot{I}_p \rightarrow 0, \text{ то } \boxed{\dot{S}_p \rightarrow 0}. \quad (35)$$

Видим, что цепь потребляет от источника только активную мощность. Причем весьма малую.

Потребляемая мощность будет тем меньше, чем выше добротность цепи. Поэтому данный тип резонанса широко применяют в радиотехнике, электронике, и автоматике.

Внутри цепи существует и реактивная мощность в виде магнитного и электрического полей, но она не выходит за пределы цепи.

Векторная диаграмма резонанса токов показана на рисунке 7.

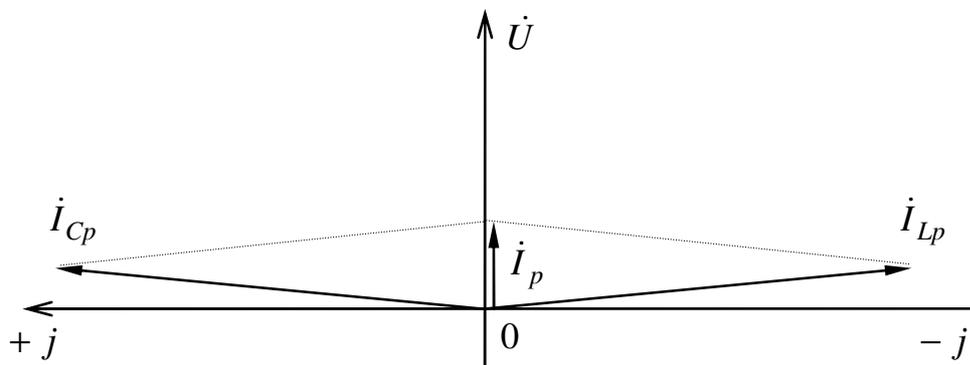


Рисунок 7 - Векторная диаграмма резонанса токов

Графики частотных характеристик для резонанса токов показаны на рисунке 8.

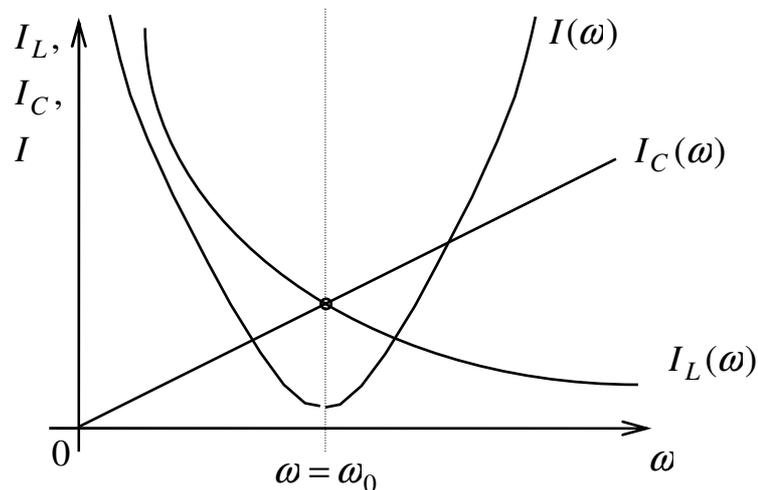


Рисунок 8 - Частотные характеристики токов при резонансе токов

В виду того, что мощность, потребляемая резонансной цепью при резонансе токов минимальна, и стремится к нулю, данный тип резонанса широко применяется в радиоэлектронике, приборостроении и автоматике.

Контрольные вопросы

1. Понятие о явлении резонанса. Понятие о колебательной системе, собственной частоте колебаний в резонансах.
2. Рассмотреть резонанс напряжений. Дать схему, формулу резонансной частоты и методы настройки цепи в резонанс.
3. Каковы электрические параметры схемы при резонансе напряжений (ток, напряжения на элементах цепи, входная мощность, коэффициент мощности, добротность)?
4. Частотные характеристики резонанса напряжений, векторная диаграмма, практическое значение.
5. Резонанс токов. Дать схему, формулу резонансной частоты и методы настройки цепи в резонанс.
6. Каковы электрические параметры схемы при резонансе токов (ток, напряжения на элементах цепи, входная мощность, коэффициент мощности, добротность)?
7. Частотные характеристики резонанса токов, векторная диаграмма, практическое значение.

Лекция 1.7 Трехфазные электрические цепи с симметричными и несимметричными приемниками

План лекции

1) Понятие о трехфазных источниках ЭДС и тока. Способы получения трехфазного тока. Преимущества трехфазной системы электроснабжения. Способы записи комплексных напряжений генератора.

2) Соединение «звездой». Соотношения между токами и напряжениями. Симметричный и несимметричный режимы работы. Роль нулевого провода. Векторные диаграммы.

3) Соединение «треугольником». Соотношения между токами и напряжениями. Симметричный и несимметричный режимы работы. Векторные диаграммы.

4) Мощность в трехфазной сети. Универсальная формула мощности.

1.7.1 Понятие о трехфазных источниках ЭДС и тока. Способы получения трехфазного тока. Преимущества трехфазной системы электроснабжения. Способы записи комплексных напряжений генератора

Трехфазные системы в настоящее время получили наибольшее распространение. На трехфазном токе работают все крупные электростанции и потребители, что связано с рядом преимуществ трехфазных цепей перед однофазными, важнейшими из которых являются:

- экономичность передачи электроэнергии на большие расстояния;
- возможность применения самого надежного и экономичного, удовлетворяющего требованиям промышленного электропривода, трехфазного асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором;
- возможность получения с помощью неподвижных обмоток вращающегося магнитного поля, на чем основана работа синхронного и асинхронного двигателей, а также ряда других электротехнических устройств.
- уравновешенность симметричных трехфазных систем, это означает, что суммарная мгновенная мощность всех фаз остается величиной постоянной в течение всего периода синусоидальной ЭДС. Уравновешенность имеет важнейшее практическое значение. Если бы суммарная мгновенная мощность пульсировала, то на валу между турбиной и генератором действовал бы пульсирующий момент. Такая переменная механическая нагрузка вредно отражалась бы на генерирующей установке, сокращая срок ее службы.

Трехфазной электрической цепью или трехфазной системой цепей называют такую систему, в которой действуют три синусоидальные ЭДС,

одинаковой частоты и амплитуды, сдвинутые друг относительно друга по фазе на угол $\frac{2}{3}\pi$ (120°) и создаваемые общим источником энергии. Этим источником является трехфазный синхронный генератор.

Он состоит из неподвижной части – статора 1 и подвижной части – ротора 3, рисунок 1.

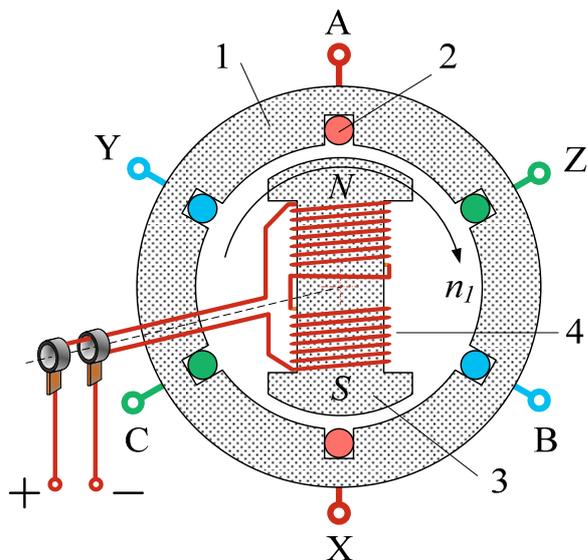


Рисунок 1 – Трехфазный генератор

Статор представляет собой пустотелый цилиндр, собранный из листов электротехнической стали, изолированных друг от друга. На внутренней поверхности цилиндра выштампованы канавки – пазы. В пазы статора укладываются три одинаковых обмотки 2, оси которых смещены друг относительно друга на треть окружности статора (на 120°).

Ротор представляет собой электромагнит, обмотка 4 которого, питается постоянным током. Он называется – ток возбуждения. Постоянный ток возбуждения подводится к обмоткам электромагнитов ротора

через два изолированных друг от друга и от вала машины кольца, через щетки, скользящие по кольцам. При вращении ротора (магнитного поля) в каждой фазе (обмотке) статора (выводы AX, BY, CZ, соответственно) по закону электромагнитной индукции будут наводиться ЭДС, изменяющиеся по синусоиде и сдвинутые на 120° . Обмотки генератора и их ЭДС показаны на рисунке 2.

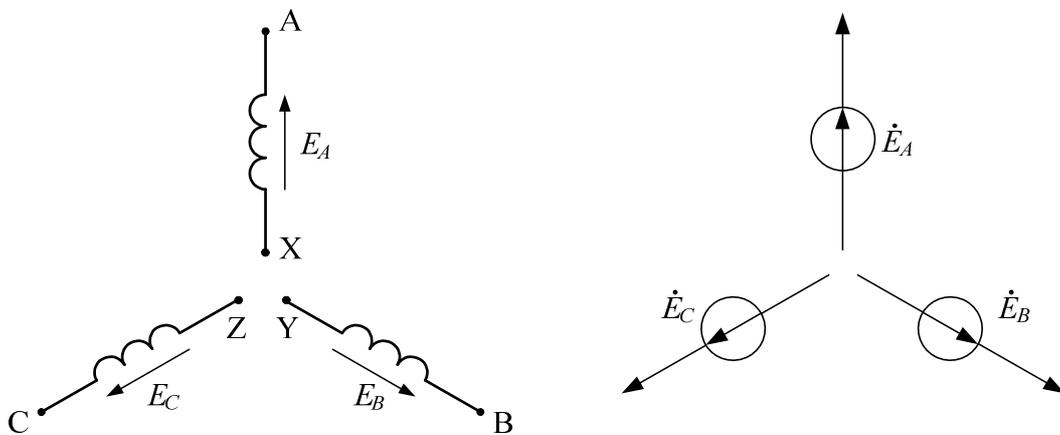


Рисунок 2 – Пояснение к работе генератора

Векторная диаграмма ЭДС генератора показана на рисунке 3.

$$\begin{aligned}
 E_A &= E_{AM} \sin \omega t; \\
 E_B &= E_{BM} \sin(\omega t + 120^\circ); \\
 E_C &= E_{CM} \sin(\omega t - 120^\circ) = E_{CM} \sin(\omega t + 120^\circ).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Частота тока в фазах обмотки статора запишется:

$$f = \frac{pn}{60}, \quad \omega = 2\pi f, \tag{2}$$

где p – число пар полюсов обмотки ротора генератора;
 n – частота вращения вала.

Комплексные действующие ЭДС будут иметь выражения:

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_A &= E_M; \\
 \dot{E}_B &= E_M e^{j120^\circ} = E_M \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = E_M (-0,5 - j0,866); \\
 \dot{E}_C &= E_M e^{-j120^\circ} = E_M \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = E_M (-0,5 + j0,866).
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

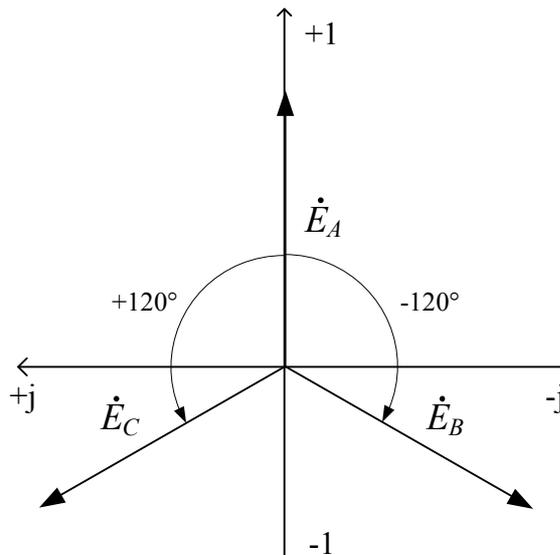


Рисунок 3 – Векторная диаграмма ЭДС генератора

Часть трехфазной системы, в которой может протекать один из ее токов, называется фазой. В каждой фазе следует различать начало и конец.

Началом называются выводы обмотки с высоким потенциалом, а концом – с низким потенциалом.

Таким образом, понятие «фаза» имеет в электротехнике два различных значения:

- фаза как аргумент синусоидально изменяющейся величины;
- фаза как составная часть многофазной электрической системы.

Обмотки трехфазных генераторов, как правило, соединяются по схеме “звезда” (рисунок 4). Соединением в “звезду” называется такое, при котором три начала или три конца фаз соединяются в общую точку, называемую нулевой или нейтральной.

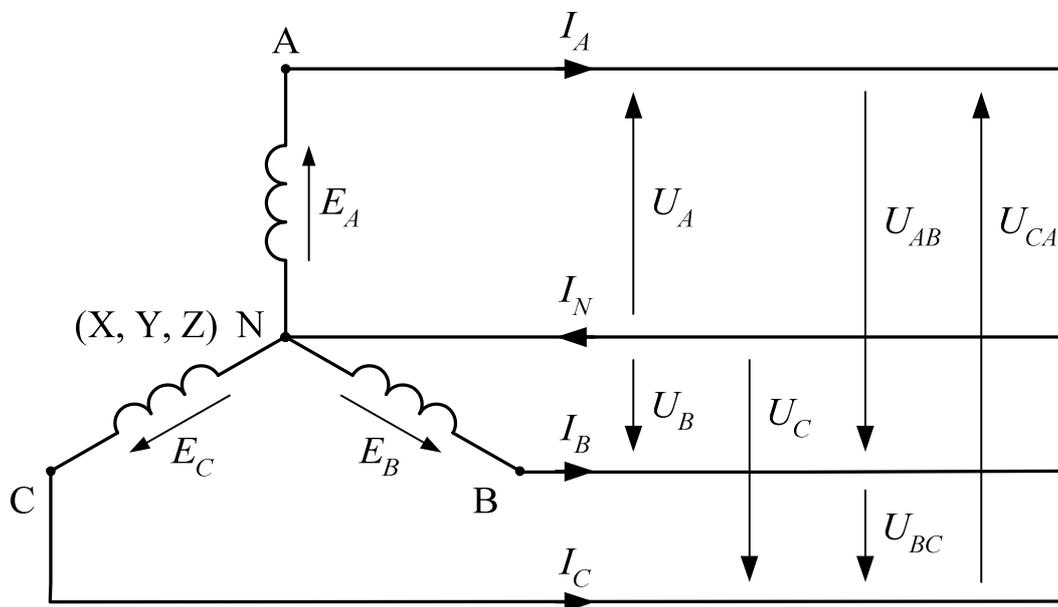


Рисунок 4 - Схема соединения обмоток трехфазного генератора “звезда”

От начала обмоток А, В, С, и нейтральной точки N выводят провода, по которым энергия передается приемникам (потребителям). Провода, соединяющие начала обмоток источника и приемника называют линейными, а провод, соединяющий нейтральные точки источника питания и приемника - нейтральным проводом или нейтралью.

Напряжения U_{AB} , U_{BC} , U_{CA} (рисунок 3) между линейными проводами, называют - линейными напряжениями, а токи i_A , i_B , i_C в линейных проводах - линейными токами.

Напряжения U_A , U_B , U_C между нейтральным проводом и соответствующими линейными проводами называют фазными напряжениями.

Положительное направление токов в линейных проводах принято в сторону потребителей, а в нейтральном проводе в сторону источника.

1.7.2 Соединение «звездой». Соотношения между токами и напряжениями. Симметричный и несимметричный режимы работы. Роль нулевого провода. Векторные диаграммы

Приемниками электрической энергии могут быть включены в трехфазную сеть двумя способами: “звездой” или “треугольником”. На рисунке 5 представлена схема соединения генератора и нагрузки по схеме “звезда - звезда” с нейтральным проводом.

Напряжения $\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c$ - фазовые напряжения приемника, $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ - фазные напряжения генератора. Из схемы видно, что

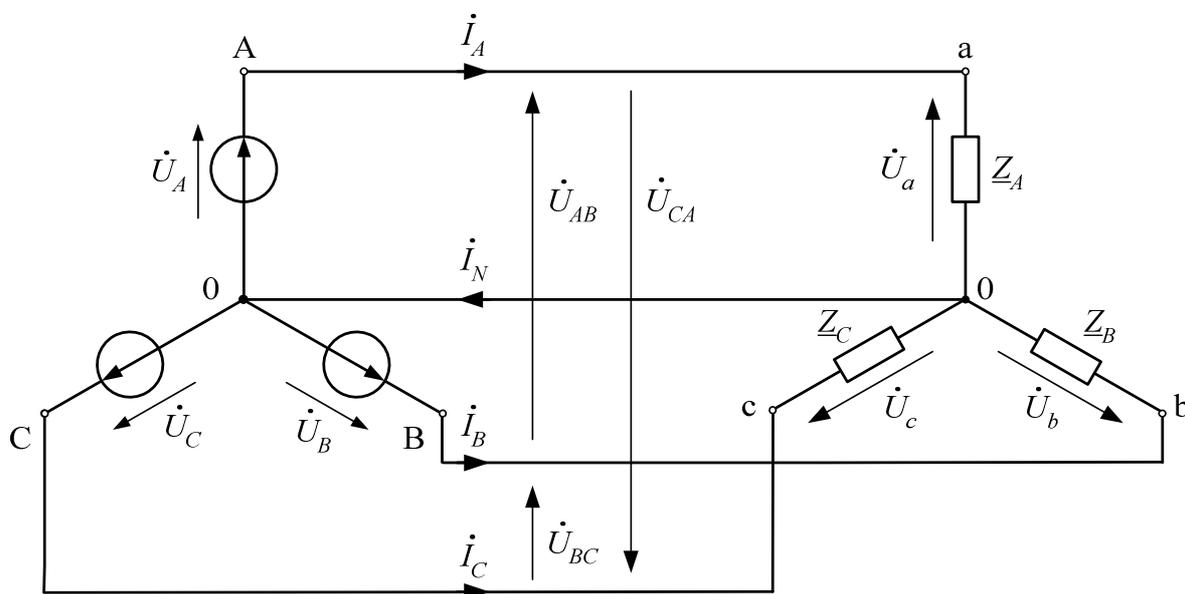
$$\dot{U}_A = \dot{U}_a, \dot{U}_B = \dot{U}_b, \dot{U}_C = \dot{U}_c. \quad (4)$$


Рисунок 5 - Соединение генератора и нагрузки по схеме “звезда - звезда”

Соотношения между линейными и фазовыми напряжениями определяются в общем случае по второму закону Кирхгофа (в геометрической или комплексной форме):

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B, \\ \dot{U}_{BC} &= \dot{U}_B - \dot{U}_C, \\ \dot{U}_{CA} &= \dot{U}_C - \dot{U}_A. \end{aligned} \quad (5)$$

При соединении потребителей “звездой”, когда все линейные и фазовые напряжения равны $|\dot{U}_A| = |\dot{U}_B| = |\dot{U}_C| = U_L$, а $|\dot{U}_a| = |\dot{U}_b| = |\dot{U}_c| = U_\phi$ справедливо соотношение

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_\phi. \quad (6)$$

Ток в нейтральном проводе определяется по первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (7)$$

При симметричной нагрузке ($\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = \bar{Z}_C = \bar{Z}_\phi$), ток в нейтральном проводе отсутствует, поэтому необходимость, в нем отпадает.

Векторная диаграмма цепи при симметричной нагрузке показана на рисунке 6, а.

При несимметричной нагрузке ток ($\bar{Z}_A \neq \bar{Z}_B \neq \bar{Z}_C$), токи в фазах различны, но за счет нейтрального провода напряжения на каждой фазе при-

емника с изменением нагрузки практически остается постоянным по величине и равным фазному напряжению генератора. Векторная диаграмма при несимметричной (неравномерной) нагрузке соответствует показанной на рисунке 6, а. При обрыве нейтрального провода, что является серьезной аварией, диаграмма принимает вид, показанный на рисунке 6, б. Возникает перекос фазных напряжений, зависящий от величин и характера нагрузки в фазах.

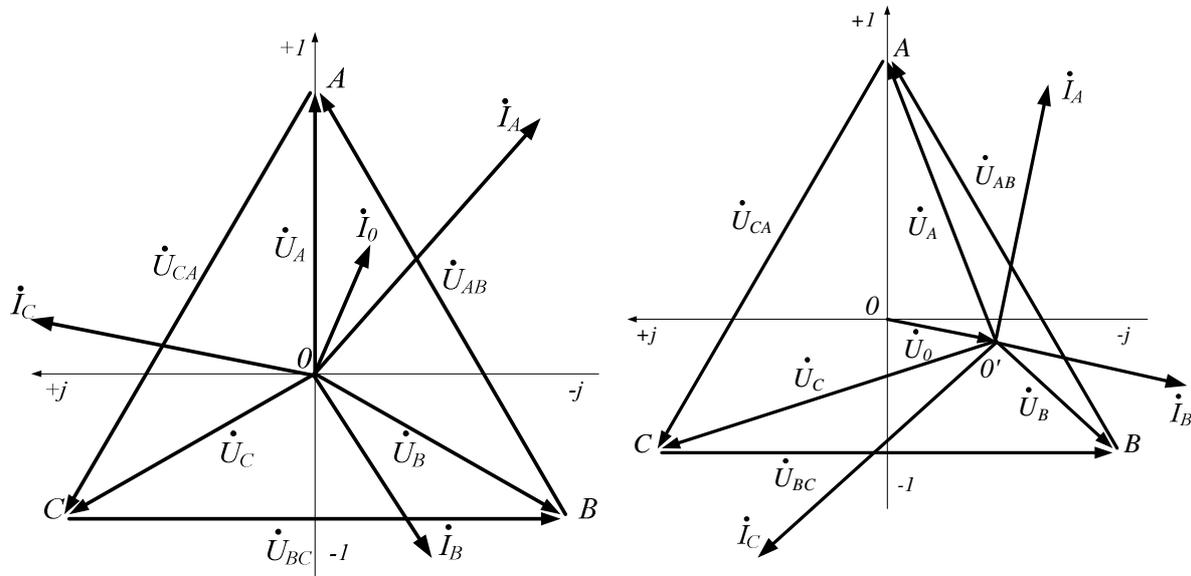


Рисунок 6 – Векторные диаграммы: а – в нормальном режиме при любой нагрузке; б – при обрыве нейтрального провода и неравномерной нагрузке.

Таким образом, нейтральный провод обеспечивает симметрию фазных напряжений приемника при несимметричной нагрузке.

1.7.3 Соединение «треугольником». Соотношения между токами и напряжениями. Симметричный и несимметричный режимы работы. Векторные диаграммы

Генератор и потребитель могут быть соединены по схеме «звезда - треугольник» (см. рисунок 7).

При соединении потребителя «треугольником» фазные напряжения всегда равны соответствующим линейным:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_{AB}, \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_{BC}, \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_{CA}. \end{aligned} \quad (8)$$

Фазные и линейные токи не равны между собой, соотношения между ними можно получить по первому закону Кирхгофа (в геометрической или комплексной форме):

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_A, \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}. \end{aligned} \quad (9)$$

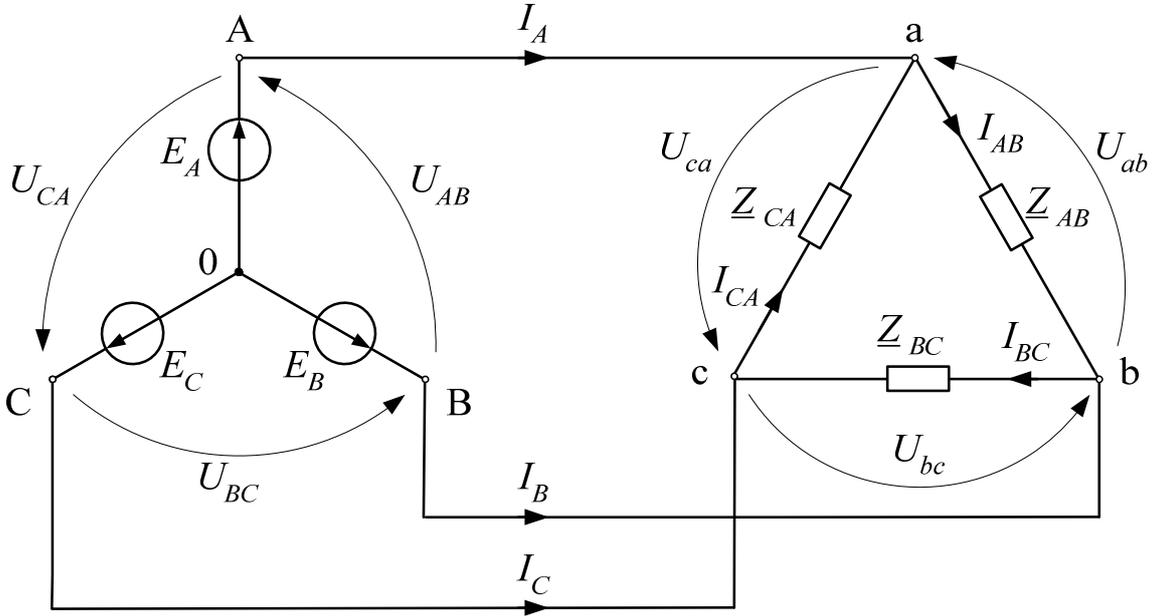


Рисунок 7 - Соединение генератора и нагрузки по схеме “звезда-треугольник”

Векторная диаграмма при неравномерной нагрузке и соединении в треугольник приведена на рисунке 8.

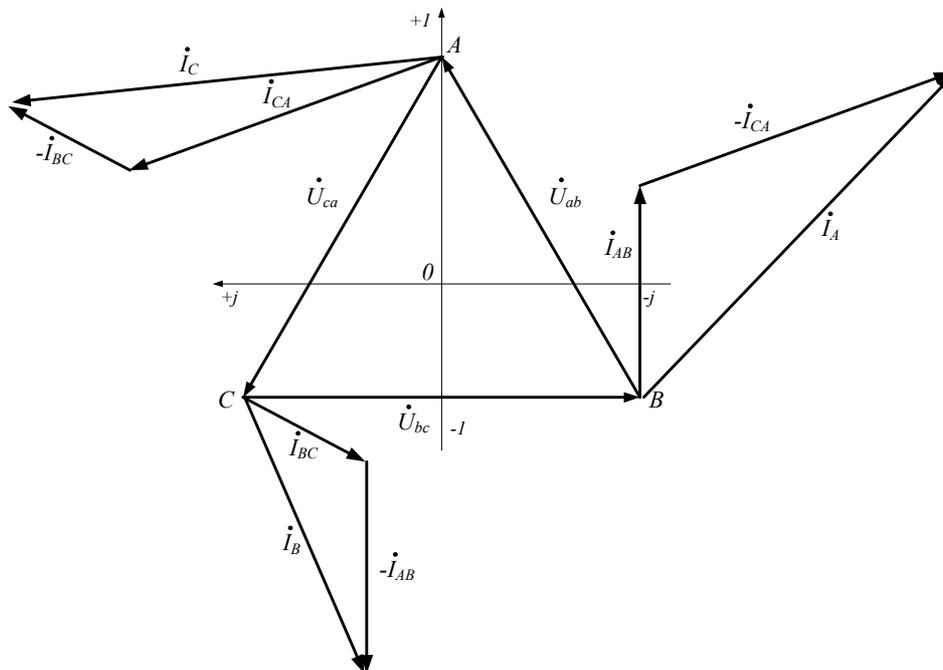


Рисунок 8 – Векторная диаграмма соединения в треугольник при неравномерной нагрузке

Независимо от характера нагрузки геометрическая сумма линейных токов равна нулю.

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0. \quad (10)$$

При симметричной нагрузке соотношение между модулями фазных (I_Φ) и линейных токов (I_L) определяется выражением

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_\Phi. \quad (11)$$

1.7.4 Мощность в трехфазной сети. Универсальная формула мощности

В общем случае несимметричной нагрузки активная мощность трехфазного приемника равна сумме активных мощностей отдельных фаз

$$P = P_A + P_B + P_C, \quad (12)$$

здесь

$$P_A = U_A I_A \cos \varphi_A, \quad P_B = U_B I_B \cos \varphi_B, \quad P_C = U_C I_C \cos \varphi_C,$$

где U_A, U_B, U_C и I_A, I_B, I_C – фазные напряжения и токи;

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ – углы сдвига фаз между напряжением и током.

Реактивная мощность соответственно равна алгебраической сумме реактивных мощностей отдельных фаз

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C, \quad (13)$$

здесь $Q_A = U_A I_A \sin \varphi_A, Q_B = U_B I_B \sin \varphi_B, Q_C = U_C I_C \sin \varphi_C,$

где U_A, U_B, U_C и I_A, I_B, I_C – фазные напряжения и токи;

$\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ – углы сдвига фаз между напряжением и током.

Полная мощность отдельных фаз

$$S_A = U_A I_A, \quad S_B = U_B I_B, \quad S_C = U_C I_C. \quad (14)$$

Полная мощность трехфазного приемника

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (15)$$

При симметричной системе напряжений

$$|\dot{U}_A| = |\dot{U}_B| = |\dot{U}_C| = U_L, \text{ и } |\dot{U}_a| = |\dot{U}_b| = |\dot{U}_c| = U_\Phi,$$

и симметричной нагрузке

$$|\dot{I}_a| = |\dot{I}_b| = |\dot{I}_c| = I_\Phi; \quad \varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi,$$

фазные мощности равны

$$P_A = P_B = P_C = P_\Phi = U_\Phi I_\Phi \cos \varphi_\Phi, \\ Q_A = Q_B = Q_C = Q_\Phi = U_\Phi I_\Phi \sin \varphi_\Phi. \quad (16)$$

Активная мощность симметричного трехфазного приемника

$$P = 3P_\Phi = 3U_\Phi I_\Phi \cos \varphi_\Phi. \quad (17)$$

Аналогично выражается и реактивная мощность

$$Q = 3Q_\Phi = 3U_\Phi I_\Phi \sin \varphi_\Phi. \quad (18)$$

Выражения часто называют универсальными формулами мощности.

Из них следует, что в трехфазной цепи при симметричной системе напряжений и симметричной нагрузке достаточно измерить мощность одной фазы и утроить результат.

1.7.4.1 Измерение активной мощности в трехфазных цепях

Измерение активной мощности в трехфазных цепях производят с помощью трех, двух или одного ваттметров, используя различные схемы их включения. Схема включения ваттметров для измерения активной мощности определяется схемой сети (трех- или четырехпроводная), схемой соединения фаз приемника (звезда или треугольник), характером нагрузки (симметричная или несимметричная), доступностью нейтральной точки.

При несимметричной нагрузке в четырехпроводной цепи активную мощность измеряют тремя ваттметрами (рисунок 9), каждый из которых измеряет мощность одной фазы – фазную мощность.

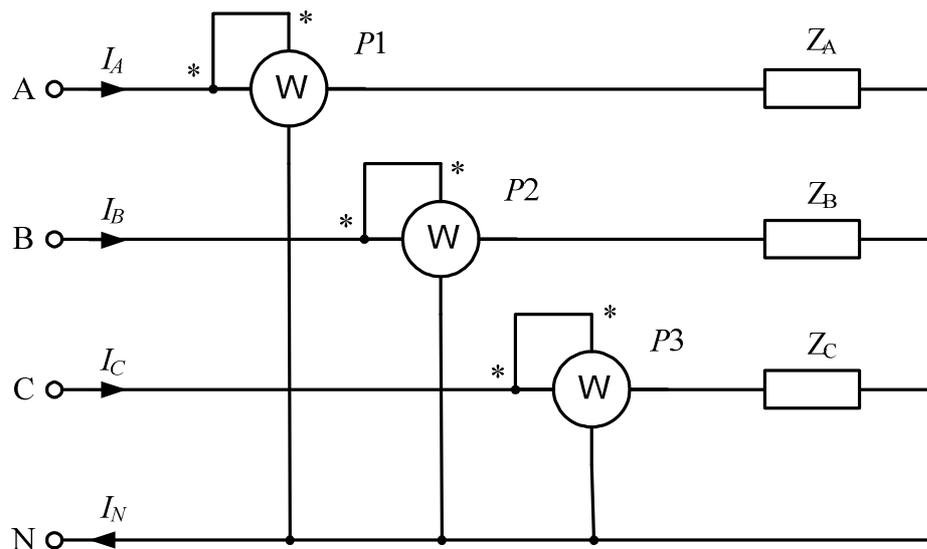


Рисунок 9 – Измерение мощности в схеме несимметричной «звезды»

Активная мощность приемника определяют по сумме показаний трех ваттметров: $P = P1 + P2 + P3$.

Измерение мощности тремя ваттметрами возможно при любых условиях.

При симметричном приемнике и доступной нейтральной точке активную мощность приемника определяют с помощью одного ваттметра, измеряя активную мощность одной фазы P_ϕ по схеме рисунок 10. Активная мощность всего трехфазного приемника равна при этом утроенному показанию ваттметра: $P = 3P_\phi$.

Измерение активной мощности симметричного приемника в трех-

фазной цепи одним ваттметром применяют только при полной гарантии симметричности трехфазной системы.

В трехпроводных трехфазных цепях при симметричной и несимметричной нагрузках и любом способе соединения приемников широко распространена схема измерения активной мощности приемника двумя ваттметрами (рисунок 11).

Показания двух ваттметров при определенной схеме их включения позволяют определить активную мощность трехфазного приемника, включенного в цепь с симметричным напряжением источника питания.

Активная мощность всей цепи здесь будет равна сумме показаний двух ваттметров: $P = P_1 + P_2$.

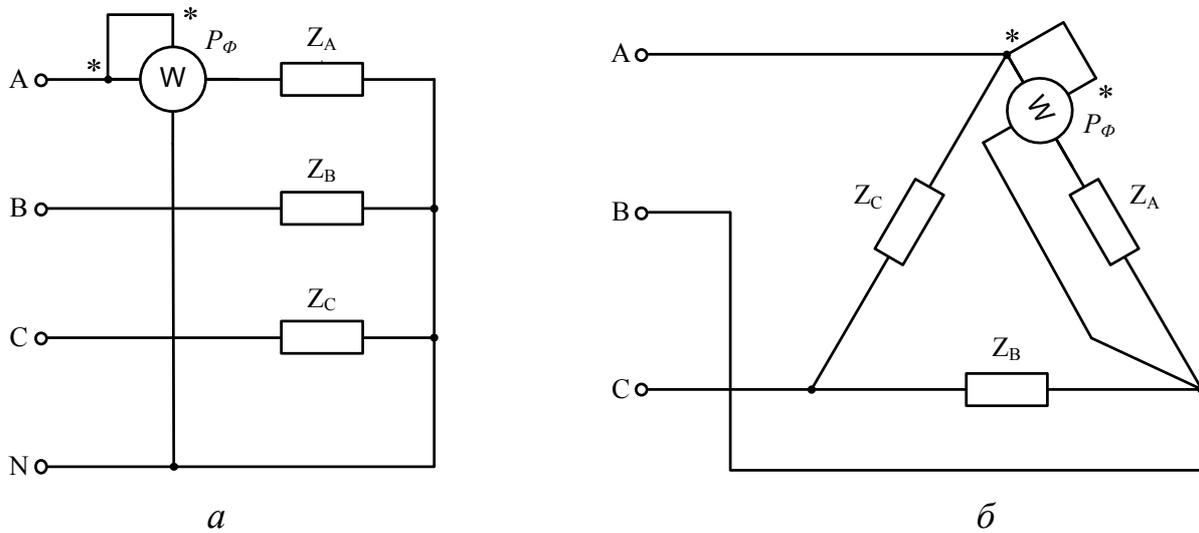


Рисунок 10 – Измерение мощности: а – в симметричной «звезде»; б – симметричном «треугольнике»

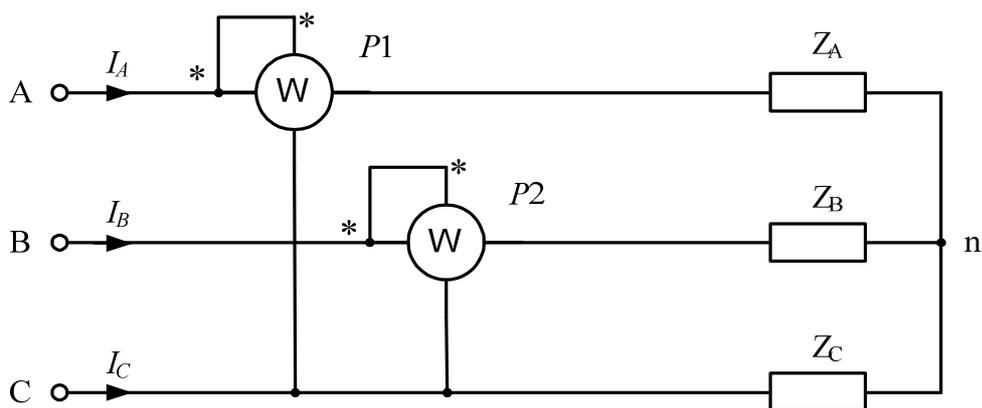


Рисунок 11 – Схема двух ваттметров

Для измерения активной мощности в трехфазных цепях промышленных установок широкое применение находят двухэлементные трехфазные электродинамические и ферродинамические ваттметры, которые содержат в одном корпусе два измерительных механизма и общую подвижную часть. Катушки обоих механизмов соединены между собой по схемам, со-

ответствующим рассмотренному методу двух ваттметров. Показание двух-элементного ваттметра равно активной мощности трехфазного приемника.

Контрольные вопросы

1. Что понимается под трехфазной системой тока, кто основоположник техники трехфазной системы тока? Получение, аналитические выражения и графики мгновенных значений ЭДС трехфазного генератора.

2. Аналитические выражения и векторные диаграммы для действующих значений ЭДС. Обозначения, применяемые в трехфазных цепях для трехфазных машин.

3. Что называется – соединением в звезду? Симметричная и несимметричная звезда, фазовые и линейные токи и напряжения. Связь между фазовыми и линейными токами и напряжениями в несимметричной звезде. Тоже для симметричной звезды. Роль нулевого провода в трехфазных четырехпроводных цепях.

4. Что называется – соединением в треугольник? Схема, соотношение между фазовыми и линейными токами и напряжениями в несимметричном треугольнике. Тоже для симметричного треугольника.

5. Активная мощность симметричной трехфазной цепи, (вывод универсальной формулы для соединения звездой и треугольником). Реактивная и полная мощности симметричной трехфазной цепи (аналитические выражения, единицы измерения, треугольник мощностей).

6. Измерение мощности и электроэнергии в четырехпроводных трехфазных цепях при симметричной и несимметричной нагрузках. Привести схемы, единицы измерения.

7. Измерение мощности и электроэнергии в трехпроводных трехфазных цепях при симметричной и несимметричной нагрузках. Привести схемы, единицы измерения).

Лекция 1.8 Магнитные цепи

План лекции

- 1) Основные величины, характеризующие магнитное поле и связь между ними.
- 2) Закон полного тока. Магнитодвижущая сила. Магнитная цепь и ее разновидности.
- 3) Основные характеристики ферромагнитных материалов. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи.
- 4) Вебер-амперные характеристики и их построение. Законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей.
- 5) Расчет простых магнитных цепей.

1.8.1 Основные величины, характеризующие магнитное поле и связь между ними

Если электрический заряд неподвижен, то вокруг него существует одно поле - электрическое поле. Если электрический заряд движется, то вокруг него кроме электрического поля, образуется еще одно дополнительное силовое поле, которое называется магнитным полем.

Магнитное поле это поле движущегося заряда или тока. Так как ток - это упорядоченное движение электрических зарядов.

Возникая от движения зарядов, магнитное поле, в свою очередь действует только на движущийся заряд или ток. На неподвижный заряд магнитное поле не действует.

Для образования магнитных полей имеется два пути:

- а) за счет естественных магнитов;
- б) за счет искусственных магнитов - электромагнитов.

Чтобы изобразить поле используется графический метод - силовые линии.

Силовая линия, это линия, касательная, к каждой точке которой дает направление действующей силы в этой точке.

Силовые линии так же, как горизонталы у топографов позволяют изображать магнитные «бугры» и «ямы» в магнитном поле. По ним можно узнать области сильных и слабых полей.

Магнитное поле, как и поле тяготения Земли, силовое, векторное поле.

Магнитное поле - направленное поле. Направление действия его указывается с помощью стрелок на силовых линиях.

Принято считать за положительное направление поля, а значит и силовых линий, направление от северного полюса N к южному S . То место, из которого силовые линии выходят, называются северным или положительным полюсом.

То место, в которое силовые линии поля входят, называется южным полюсом. Внутри магнита силовые линии направлены от южного полюса к северному.

Таким образом, силовые линии магнитного поля замкнутые на себя линии, они не имеют ни начала, ни конца. В этом коренное отличие силовых линий магнитного поля от силовых линий электрического поля, которые всегда имеют концы, на зарядах, создающих поле.

Вокруг уединенного прямолинейного проводника с током силовые линии представляют собой концентрические окружности. Общий центр, которых находится в центре проводника с током. И здесь силовые линии, замкнутые линии на себя и не имеют, ни начала, ни конца.

Направление действия магнитного поля определяется двумя способами:

- а) пробными магнитными стрелками;
- б) правоходовым винтом - штопором (буравчиком).

Правило штопора гласит:

Если штопор вворачивать так, чтобы жало двигалось в направлении тока, то вращающаяся ручка при этом укажет направление силовых линий магнитного поля.

Магнитное поле характеризуется тремя главными величинами или параметрами:

1) B - магнитной индукцией или плотностью магнитного поля, измеряется в теслах;

2) H - напряженностью магнитного поля (магнитная сила поля - расчетная величина), измеряется в А/м;

3) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м}$ - абсолютной магнитной проницаемостью (характеризует влияние среды на образование магнитного поля в этой среде).

Эти величины связаны между собой выражением:

$$B = \mu_a H = \mu \cdot \mu_0, \quad (1)$$

где μ - относительная магнитная проницаемость.

Для воздуха и для всех цветных металлов $\mu = 1$, поэтому $\mu_a = \mu_0$. Для ферромагнитных материалов $\mu_a \neq \text{const}$, кроме того значение относительной магнитной проницаемости для таких материалов намного больше единицы. Например: для трансформаторного железа $\mu \approx 5000$ (трансформаторные сердечники), для пермаллоя $\mu \approx 100\,000$ (сердечники реле, экраны), для серого чугуна $\mu \approx 180$ (корпуса электрооборудования).

Магнитным потоком называется поток вектора индукции, взятый по всей площади, нормальной к этому потоку.

Если $\vec{B} = \text{const}$ и вектор индукции перпендикулярен площадке $d\vec{S}$, то получим

$$\boxed{\Phi = \vec{B} \oint_S d\vec{S} = BS} . \quad (2)$$

Магнитный поток измеряется в веберах.

Индукция или плотность магнитного потока измеряется в веберах на м^2 или в теслах.

1.8.2 Закон полного тока. Магнитодвижущая сила. Магнитная цепь и ее разновидности

Закон полного тока - основной расчетный закон электротехники. Закон полного тока - экспериментальный закон. Он выведен на основании математической обработки опытных данных

Закон полного тока гласит:

Намагничивающая сила вдоль любого замкнутого контура равна полному току, пронизывающему этот контур.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{i=n} I_i = \oint_L \vec{H}_e d\vec{l}}$$
 , здесь $\sum_{i=1}^{i=n} I_i$ - полный ток через контур. (6)

Магнитодвижущая сила или намагничивающая сила вдоль контура. Она названа так по аналогии с электродвижущей силой.

Действительно,

$$\text{ЭДС} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} ; \quad \text{МДС} = \oint_L \vec{H}_e d\vec{l} .$$

Намагничивающая сила действует аналогично ЭДС. Электродвижущая сила создает электрический напор, под действием которого по цепям идет ток. МДС - создает магнитный напор, под действием которого создается магнитный поток.

Полным током через любой контур называется алгебраическая сумма токов, пронизывающих этот контур.

Полный ток любой катушки, которая имеет w витков, будет равен:

$$\sum_{i=1}^{i=w} I_i = I_1 + I_2 + \dots + I_w = Iw , \quad \boxed{\sum_{i=1}^{i=n} I_i = Iw} , \quad (7)$$

где Iw - ампервитки катушки.

Знаки токов размечаются по правилу штопора (буравчика):

а) произвольно намечается направление положительного обхода по контуру;

б) применяя штопор, вращаем ручку в направлении выбранного обхода по заданному контуру. Жало штопора определяет направление протекания положительных токов.

В электрических машинах, трансформаторах, электромагнитных аппаратах и приборах весьма широко применяются цельные или наборные сердечники из электротехнической стали. Для чего это делается? Потому, что ферромагнитные материалы очень хорошо проводят через себя магнитные потоки. Железо в тысячи раз меньше препятствует магнитному потоку, чем воздух и все другие, например, цветные металлы.

В связи с указанным, при стальных сердечниках магнитный поток из воздуха и других сред устремляется в благоприятную для него среду - сталь.

По тем же соображениям почти невозможно вытянуть магнитный поток из стального сердечника в воздух.

В катушках без стального сердечника, магнитный поток хаотичен и не весь замыкается относительно всех витков.

При наличии сердечника, магнитный поток весьма уплотнен и замыкается вокруг всех витков. Силовые линии потока в сердечнике параллельны. Густота их более равномерна. Сердечник позволяет направлять поток по заранее намеченному пути. С помощью сердечника можно на разных участках пути потока сгущать линии или разрезать, а так же ответвлять те или иные потоки от главного.

Таким образом, сердечники из стали так же благоприятны для магнитных потоков, как медь или алюминий для электрических токов.

Магнитопроводы образуют магнитные цепи подобные электрическим цепям для тока. Магнитные цепи делятся на две группы: простые или неразветвленные; сложные или разветвленные.

Пример магнитных цепей показан на рисунке 1.

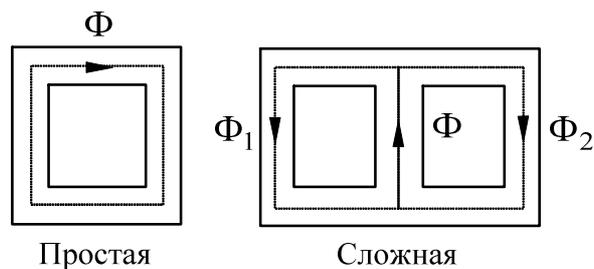


Рисунок 1 - Магнитные цепи

Кроме того, магнитные цепи бывают: а) замкнутые; б) разомкнутые.

Замкнутой магнитной цепью называют такую цепь, в которой магнитный поток на всем пути проходит по стальному сердечнику.

Разомкнутой магнитной цепью называют такую, в которой магнитный поток на всем своем пути не проходит по стали, а часть пути идет по воздуху.

Воздушные участки магнитной цепи называются воздушными зазорами.

Самое большое препятствие для магнитного потока - это воздушный зазор.

Магнитные цепи делятся на цепи: с постоянным сечением магнитопровода; с переменным сечением магнитопровода.

1.8.3 Основные характеристики ферромагнитных материалов. Роль ферромагнитных материалов в магнитной цепи.

Для магнитного поля в стальном сердечнике может записано соотношение:

$$\mu_a = \frac{B}{H} \neq \text{const} . \quad (9)$$

Таким образом, стальные магнитопроводы являются нелинейными цепями.

Зависимость индукции магнитного поля в стальном сердечнике от тока намагничивания, то есть от напряженности поля, показана на рисунке 2.

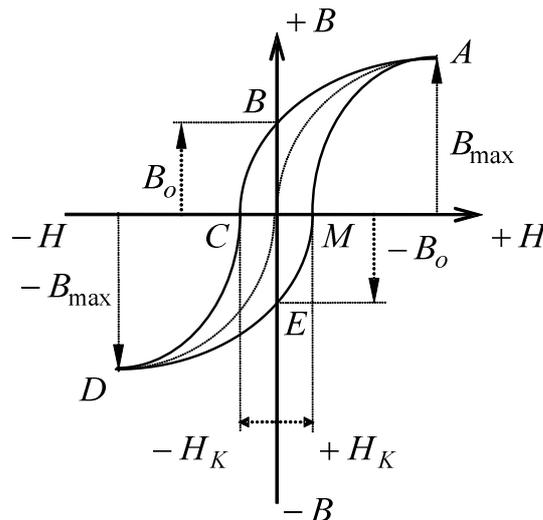


Рисунок 2 - Кривая гистерезиса стали

На рисунке 2:

B_{max} - точка насыщения стали;

B_o - остаточная индукция;

H_K - коэрцитивная (задерживающая_ сила).

Процесс отставания магнитных свойств стали от намагничивающей силы называется гистерезисом.

Графически процесс гистерезиса выражается петлей гистерезиса.

Петля показывает, что намагничивание и размагничивание стали не совсем обратимые процессы. Часть энергии задерживается в стали. Эта энергия пропорциональна площади петли гистерезисного цикла. Задержанная энергия идет на бесполезное, и даже вредное нагревание сердечни-

ка и магнитопровода в целом. Создаются потери энергии, которые называются потерями на гистерезис и перемагничивание.

Чтобы уменьшить нагрев сердечников выпускают специальные электротехнические сорта стали. Для них гистерезис очень мал. Их часто называют магнитомягкими сталями. Если взять среднюю линию такой узкой петли. То мы получим усредненную линию, которая называется кривой намагничивания стали, рисунок 3.



Рисунок 3 - Петля гистерезиса и кривая намагничивания стали

Кривая намагничивания не имеет точного аналитического выражения. Поэтому для каждого материала ее получают опытным путем.

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия, позволяющая для магнитных цепей ввести ряд понятий, аналогичных понятиям, служащих для описания явлений в электрических цепях. Это распространяется и на методы расчета магнитных цепей.

В электрических цепях токи возникают под воздействием ЭДС.

В магнитных цепях магнитные потоки создаются ампервитками (намагничивающей силой или магнитодвижущей силой МДС).

Пользуясь законом полного тока, можно получить: магнитные напряжения; магнитные сопротивления, проводимости.

1.8.4 Вебер-амперные характеристики и их построение. Законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей.

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия, позволяющая распространить на магнитные цепи методы расчета цепей постоянного тока.

В электрических цепях токи возникают под воздействием ЭДС.

В магнитных цепях магнитные потоки создаются ампервитками (намагничивающей силой или магнитодвижущей силой МДС).

Пользуясь законом полного тока, можно получить: магнитные напряжения; магнитные сопротивления, проводимости.

Рассмотрим неразветвленную магнитную цепь с переменным сечением участков 1 и 2, изображенную на рисунке 4.

Пусть нам известны геометрические размеры магнитопровода и магнитные характеристики материалов: $l_1; S_1; \mu_1; l_2; S_2; \mu_2$.

Найдем связь между магнитным потоком Φ и МДС цепи Iw .

Величины индукции на первом и втором участках цепи будут таковы

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}. \quad (10)$$

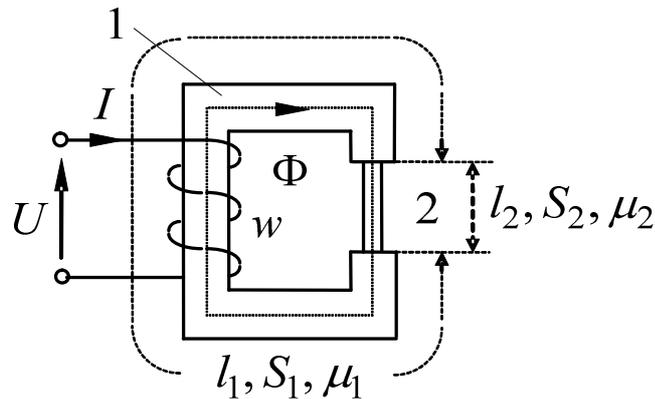


Рисунок 4 - Магнитная цепь

Напряженности поля на участках:

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_1 \mu_0 S_1}; \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_2 \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_2 \mu_0 S_2}. \quad (11)$$

Применим закон полного тока к контуру, ограниченному средней магнитной линией $l = l_1 + l_2$.

$$F = \oint_L \vec{H} d\vec{l} = H_1 \int_0^{l_1} dl + H_2 \int_{l_1}^{l_1+l_2} dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 = Iw, \quad (12)$$

где $F = Iw$ - намагничивающая сила (НС или МДС).

Подставим (11) в (12) и получим

$$F = Iw = \Phi \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} + \Phi \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2}. \quad (13)$$

Обозначим:

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} \text{ - магнитное сопротивление первого участка;}$$

$$R_{M2} = \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} \text{ - магнитное сопротивление второго участка.}$$

С учетом введенных обозначений запишем

$$F = Iw = \Phi R_{M1} + \Phi R_{M2}, \quad (14)$$

где $U_{M1} = \Phi R_{M1}$ - магнитное напряжение на первом участке;

$U_{M2} = \Phi R_{M2}$ - магнитное напряжение на втором участке.

$$\Phi = \frac{F}{R_{M1} + R_{M2}} = \frac{Iw}{R_{M1} + R_{M2}} = \frac{Iw - U_{M2}}{R_{M1}} = \frac{U_{M1}}{R_{M1}}. \quad (15)$$

Уравнение (15) называется законом Ома для магнитной цепи.

По выражению (15) можно составить эквивалентную расчетную схему неразветвленной магнитной цепи, рисунок 5.

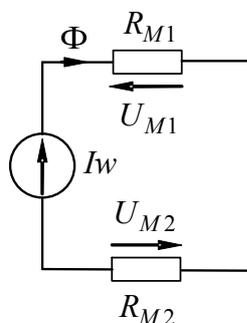


Рисунок 5 - Расчетная схема магнитной цепи

Для магнитных цепей можно сформулировать законы Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи.

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} \Phi_i \right)_A = 0 \quad (16)$$

Алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю.

Потоки, притекающие к узлу, берутся со знаком плюс. Потоки, отходящие от узла - берутся со знаком минус.

Второй закон Кирхгофа для магнитной цепи.

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i w_i + \sum_{k=1}^{k=n} H_k l_k = 0 \quad (17)$$

Алгебраическая сумма намагничивающих сил и магнитных напряжений в любом замкнутом контуре магнитной цепи равна нулю.

1.8.5 Расчет простых магнитных цепей

Магнитные цепи из ферромагнитных материалов являются нелинейными. Это значит, что магнитные сопротивления участков цепи не остаются постоянными и зависят от величины магнитных потоков, протекающих по нему. Поэтому, магнитные цепи, как цепи нелинейные, рассчитываются графоаналитическими методами.

Расчет имеет огромное практическое значение, так как большинство электротехнических устройств имеют магнитные цепи.

Обычно бывает задано для каждого участка магнитной цепи:

1) длина участка l_1 ;

- 2) сечение участка S_1 ;
- 3) материал участка;
- 4) кривая намагничивания $B = \mu H$;
- 5) число витков катушек w_1 .

Магнитные цепи рассчитываются, в зависимости от поставленных условий, различно. На практике наиболее часто используется два варианта расчета.

1-й вариант (прямая задача). Заданы: магнитные потоки $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

Требуется определить намагничивающие силы HC_1, HC_2, \dots или токи в обмотках.

2-й вариант (обратная задача). Заданы: токи I_1, I_2, \dots, I_n или намагничивающие силы HC_1, HC_2, \dots обмоток.

Требуется определить магнитные потоки во всех участках магнитной цепи $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$.

Рассмотрим решение задачи по первому варианту.

Цепь показана на рисунке 6.

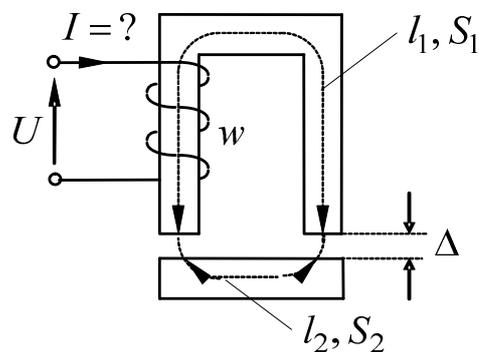


Рисунок 6 - Магнитная цепь

Дано:

Δ ; S_1 ; S_2 ; l_1 ; l_2 ; Φ ; w и кривые намагничивания всех участков цепи $B_i = \mu_i H_i$.

Найти:

Намагничивающий ток $I = ?$.

Ход расчета.

1. Составляем расчетную схему, см. рисунок 7.

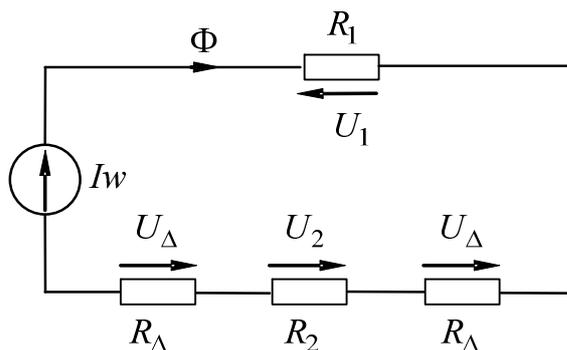


Рисунок 7 - Расчетная схема

2. Размечаем на схеме стрелки действия МДС.

Если дан ток в катушке и направление намотки витков, то направление действия МДС определяется по правилу штопора.

3. Размечаем стрелку магнитного потока Φ .

Стрелку Φ можно размечать произвольно, однако, в неразветвленной цепи ее можно определить правильно сразу. Положительное направление стрелки Φ согласуется с действием МДС.

4. Размечаем стрелки магнитных напряжений.

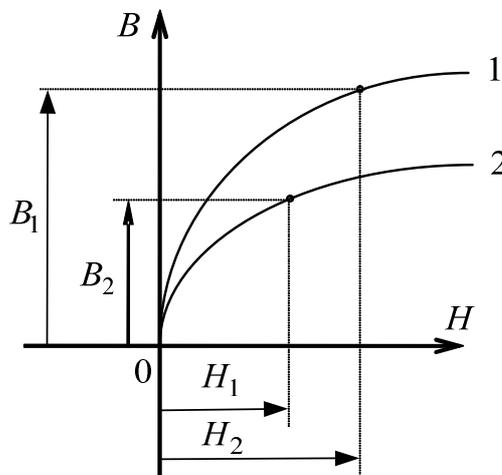
Стрелки размечаются параллельно элементам магнитных сопротивлений всегда против стрелки намеченного ранее магнитного потока Φ .

5. Определяем магнитные индукции на каждом участке цепи B_1, B_2 .

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}, B_2 = \frac{\Phi}{S_2}, B_{\Delta} = \frac{\Phi}{S_{\Delta}}. \quad (18)$$

6. Определяем напряженности магнитного поля на участках стального магнитопровода.

Благодаря нелинейности цепи со сталью, определение H_1 и H_2 производим по кривым намагничивания этих участков, см. рисунок 8. Эти кривые должны быть заданы.

Рисунок 8 - Определение H_1 и H_2

7. Определяем напряженность поля в воздушных зазорах.

Определить истинную картину распределение магнитного потока в воздушном зазоре - сложная задача. Для малых зазоров $\Delta \ll l$, магнитное поле в зазоре можно считать однородным. Распор магнитных силовых линий в зазоре будем считать отсутствующим. Тогда

$$H_{\Delta} = \frac{B_{\Delta}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 0,8 \cdot 10^6 B_{\Delta}, \quad (19)$$

где H_{Δ} - напряженность магнитного поля в зазоре, в А/м;

B_{Δ} - плотность магнитного поля (индукция) в воздушном зазоре в Т.

8. Определяем магнитные напряжения.

$$U_1 = H_1 l_1; \quad U_2 = H_2 l_2; \quad U_{\Delta} = H_{\Delta} \cdot \Delta. \quad (20)$$

9. Определяем уравнения физического состояния цепи.

Составление уравнений производится на основании двух законов Кирхгофа любыми ранее рассмотренными методами расчета электрических цепей, кроме метода наложения.

В нашем случае по второму закону Кирхгофа имеем

$$Iw - U_{\Delta} - U_2 - U_{\Delta} - U_1 = 0. \quad (21)$$

Тогда получим

$$Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_{\Delta} \cdot \Delta. \quad (22)$$

10. Определяем ток в обмотке.

В нашем случае,

$$I = \frac{U_1 + U_2 + 2U_{\Delta}}{w} = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_{\Delta} \cdot \Delta}{w}. \quad (23)$$

Решение обратной задачи.

Задача решается с помощью построения вспомогательной характеристики $\Phi = f(\sum H_i l_i)$.

Для построения характеристики составляется таблица вида:

Таблица 1 - К расчету магнитного потока неразветвленной цепи

n/n	Φ	B_1	B_2	B_{Δ}	H_1	H_2	H_{Δ}	$H_1 l_1$	$H_2 l_2$	$2H_{\Delta} l_{\Delta}$	$\sum H_i l_i$
	Веб	Т	Т	Т	А/м	А/м	А/м	А	А	А	А
1	Φ'										
2	Φ''										
3	Φ'''										
...											

По данным таблицы 1 строят зависимость магнитного потока от падения магнитного напряжения в цепи (вебер-амперную характеристику) и графически определяют по ней искомое значение магнитного потока, как показано на рисунке 9.

Расчет разветвленной магнитной цепи так же основан на законах Кирхгофа. Вследствие нелинейности цепи расчет производится графоаналитическими методами.

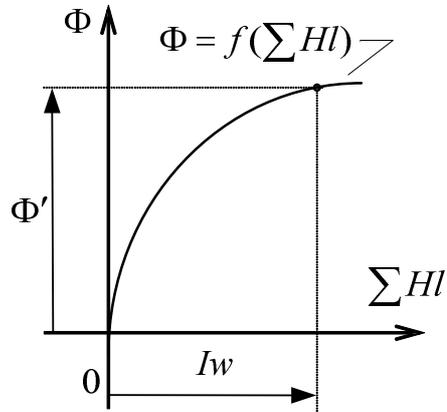


Рисунок 9 - Определение магнитного потока

В последнее время в связи с широким применением ЭВМ, актуальность графоаналитических приемов расчета снизилась.

Контрольные вопросы

1. Величины характеризующие магнитное поле. Связь между ними.
2. Магнитные свойства материалов. Ферромагнитные вещества. Кривая намагничивания, гистерезис.
3. Закон Ома и законы Кирхгофа для магнитных цепей.
4. Закон полного тока. Вебер-амперные характеристики.
5. Расчет магнитных цепей (прямая и обратная задачи).
6. Явление электромагнитной индукции, индуктивность и взаимои-
ндуктивность.

Лекция 1.9 Переходные процессы в линейных цепях

План лекции

- 1) Основные положения и определения.
- 2) Включение катушки на постоянное напряжение. Короткое замыкание катушки с током. Энергия магнитного поля катушки.
- 3) Заряд и разряд конденсатора. Энергия электрического поля конденсатора. Законы коммутации.
- 4) Включение полной цепи RLC на постоянное напряжение.
- 5) Операторный метод расчета переходных процессов. Теорема Хэвисайда.

1.9.1 Основные положения и определения

Ранее, мы изучали установившиеся, стационарные режимы в электрической цепи. В таких режимах, электрическая энергия, связанная с цепью в виде магнитного и электрического полей остается неизменной.

Совершенно иное возникает при переходных, неустановившихся, нестационарных режимах. Например, при включении, отключении или переключении в электрических цепях. Здесь количество энергии связанное с цепью изменяется динамическим образом. В переходных процессах изменяются так же магнитные и электрические поля, связанные с цепью. В таких случаях нарушается постоянно действующая пропорция между напряжением, током, сопротивлением. В течение переходного режима сопротивление цепи так же не остается постоянным. Они меняются во времени.

Под установившимся режимом понимают такой, при котором общее количество энергии связанное с цепью в виде электрического и магнитного полей остается постоянным и от времени не зависит.

Переходным режимом (или процессом) называют такой, при котором общее количество энергии связанное с цепью в виде электрического и магнитного полей динамически изменяется во времени.

Таким образом, главной причиной, которая вызывает переходный процесс, является перераспределением энергии в цепи.

Переходный процесс не может происходить мгновенно, так как на перераспределение энергии требуется определенное (теоретически бесконечное) время.

Переходный процесс возникает при переходе от одного установившегося режима к другому, см. рисунок 1.

Поэтому в начале и в конце он всегда связан с величинами напряжений и токов установившихся режимов.

$$t = t_1 - t_0, \tag{1}$$

где t – время переходного режима;

t_0 – начало переходного режима и, одновременно, конец первого установившегося режима (t_0 часто принимается равным нулю);

t_1 – конец переходного режима и, одновременно, начало нового второго установившегося режима.



Рисунок 1 – Переходный процесс

Теоретически $t = \infty$, практически это время искусственно ограничивают, когда влияние его на токи и напряжения становятся меньше одного процента.

В обычных схемах переходные процессы протекают весьма быстро в течение долей секунды или секунд.

Из большого разнообразия переходных процессов инженерную практику интересуют главным образом коммутационные переходные режимы.

Коммутационными переходными режимами называются режимы, которые возникают при включении, выключении, коротких замыканиях, различного рода переключениях, внезапных изменениях параметров цепи.

Расчет переходных режимов весьма важен, так как только по этим данным можно правильно выбрать электрические машины, выключатели, устройства защиты, коммутационное оборудование и т.д.

Здесь мы будем рассматривать коммутационные переходные режимы только в линейных цепях с сосредоточенными параметрами.

Такие цепи и при переходных процессах подчиняются законам Ома и Кирхгофа, но для мгновенных значений и в дифференциальной форме.

Переходные процессы в нелинейных цепях точному аналитическому расчету не поддаются. В таких цепях законы Ома и Кирхгофа перестают существовать. Их анализируют численно на ЭВМ.

Условимся, что, исследуя цепи, мы будем всегда помнить о следующих нами принятых везде допущениях:

1) Источник энергии, питающий цепь, имеет мощность потенциально большую, чем мощность цепи $P_{\Gamma} \gg P_{\text{цепи}}$. В связи с этим при переходном режиме $U_{\Gamma} = \text{const}$; $f_{\Gamma} = \text{const}$;

2) Влиянием электрической дуги на контактах коммутационного устройства пренебрегаем;

3) Собственное время срабатывания коммутационной аппаратуры считаем равным нулю.

1.9.2 Включение катушки на постоянное напряжение. Короткое замыкание катушки с током. Энергия магнитного поля катушки.

Включение катушки на постоянное напряжение

Рассмотрим, как изменяется ток i и напряжение U_L во время переходного режима при включении катушки (цепи RL) на постоянное напряжение, схема представлена на рисунке 2. Начальные условия процесса: при $t = 0$, $i(0) = 0$.

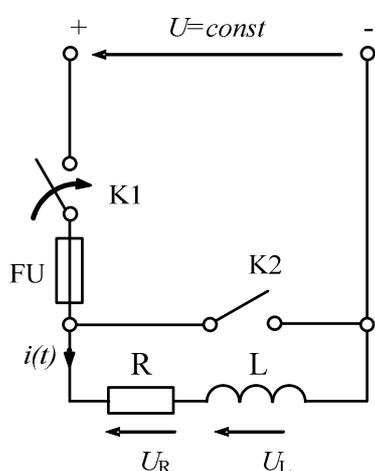


Рисунок 2 – Схема включения катушки на постоянное напряжение

В момент времени $t = 0$, ключ $K1$ замыкается и начинается переходный процесс в катушке, представленной на схеме своими параметрами: индуктивностью L и активным сопротивлением R .

Электрическое равновесие цепи для любого момента времени будет:

$$U_r + U_L = U \text{ но } U_r = ri;$$

$$U_L = -e_L = L \frac{di}{dt}. \quad (2)$$

Тогда получаем

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U. \quad (3)$$

Мы имеем неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого по-

рядка.

Примечание

Его решение в общем виде запишется так:

$$i = i' + i'', \quad (4)$$

где i' – частное решение уравнения (3) с правой частью;

i'' – общее решение этого же уравнения, но без правой части (она приравнивается к нулю).

Каждое из решений должно удовлетворять своему уравнению, поэтому:

$$L \frac{di'}{dt} + Ri' = U. \quad (5)$$

Пусть i' будет постоянной величиной $i' = const$. Тогда частное решение примет вид

$$i' = \frac{U}{R}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что частное решение не зависит от времени u , следовательно, определяет установившийся ток.

Для общего решения имеем

$$L \frac{di''}{dt} + Ri'' = 0. \quad (7)$$

Мы получили однородное линейное дифференциальное уравнение, общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$i'' = A_1 e^{p_1 t}, \quad (8)$$

где A_1 – постоянная интегрирования, которая связывает общее решение с конкретными условиями задачи;

$e = 2,71828$ – основание натуральных логарифмов;

p_1 – корень характеристического уравнения;

t – время.

Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения запишется так $Lp + R = 0$, отсюда

$$p = -R/L. \quad (9)$$

Корень характеристического уравнения p называют коэффициентом затухания. Коэффициент затухания в физических задачах получается всегда отрицательным. Это значит, что во времени процесс изменения i'' будет стремиться к нулю, $i''(\infty) \rightarrow 0$.

Размерность величины, обратной p , соответствует размерности времени.

$\left[\frac{L}{R} \right] = \left[\frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} \right] = [\text{с}]$, поэтому вводят понятие постоянной времени τ .

$$\tau = \frac{1}{p} = \frac{L}{R}. \quad (10)$$

Учитывая соотношения (8) и (9) в выражении (7), получим

$$i'' = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-\frac{R}{L} t} = A_1 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что:

1) Постоянной времени τ электрической цепи называется время, в течение которого переменная величина изменяется в основании натуральных логарифмов (2,71828 раз).

2) Через время $t = 5\tau$ влияние времени на изменение переменной величины i'' практически прекращается, так как i'' становится

меньше одного процента, поэтому с точностью до 1% переходный процесс длится около 5τ .

$$t_{\text{III}} = 5\tau = 5\frac{L}{R}. \quad (12)$$

3) Длительность переходного режима в электрической цепи можно регулировать изменением параметров цепи R , L , C .

Постоянная интегрирования A_1 определится из заданных нам начальных условий.

$$i(0) = i''(0) + i'(0) = A_1 e^{p \cdot 0} + \frac{U}{R} = 0, \text{ отсюда } A_1 = -\frac{U}{R}.$$

Решая дифференциальное уравнение (3) получим выражение для тока в при включении катушки на постоянное напряжение. Оно таково:

$$i(t) = i' + i'' = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (13)$$

Напряжение на индуктивности определяется так:

$$U_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} \right) = L \left(-\frac{U}{R} \right) \cdot \left(-\frac{R}{L} \right) \cdot 1 \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = U \cdot e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (14)$$

Построим графики $i(t)$ и $U_L(t)$, то есть изобразим выражения (13) и (14) графически.

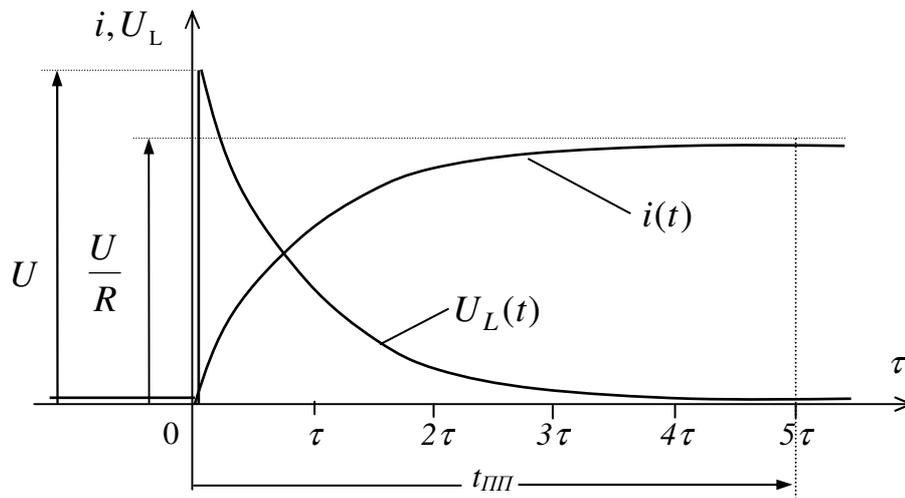


Рисунок 3 – График зависимостей $i(t)$ и $U_L(t)$

На основании выражений (13), (14) и графиков можно сделать следующие выводы:

1 Ток в момент включения катушки равен нулю, а затем плавно по экспоненциальному закону возрастает и через время $t = 5\tau$ достигает установившегося значения и перестает зависеть от времени.

2 Напряжение на индуктивности катушки U_L в момент включения скачком возрастает до величины напряжения источника, а затем плавно по

экспоненциальному закону спадает и через время $t = 5\tau$ обращается практически в ноль.

3 Напряжение на индуктивности U_L в первый момент включения полностью компенсирует напряжение источника $U = -U_L$, "запирает" источник, поэтому ток через катушку в первый момент после включения не проходит. Катушка как бы имеет бесконечно большое сопротивление (ветвь с катушкой как бы разорвана).

4 Часть энергии, поступающей в катушку, запасается в магнитном поле катушки.

Короткое замыкание катушки с током

Ключом К2 замкнем накоротко катушку, по которой течет установившийся ток, $I = U/R$, см. рисунок 2. Предохранитель FU при этом сгорает и ветвь с катушкой оказывается отключенной от источника питания. Полученная схема приведена на рисунке 4.

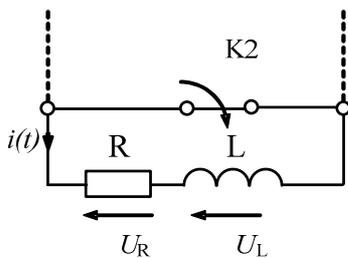


Рисунок 4 – Короткое замыкание катушки с током

Очевидно, ток в катушке сразу не прекратится. Некоторое время он будет течь за счет запасов энергии в магнитном поле катушки. Направление тока не изменится благодаря реактивности закона электромагнитной индукции.

Электрическое равновесие цепи запишется так:

$$e_L - U_R = 0, \text{ но } e_L = -L \frac{di}{dt}; \quad U_R = Ri. \quad (15)$$

Тогда:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (16)$$

Мы получили однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Примечание

Решение уравнения (16) запишется в общем виде таким образом:

$$i = i'' = A_1 e^{pt}. \quad (17)$$

Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения запишется так: $Lp + R = 0$, отсюда

$$p = -R/L. \quad (18)$$

По тем же соображениям, что и ранее, длительность переходного режима при коротком замыкании $t_{кз}$ составит $t_{кз} = 5\tau = 5(L/R)$.

Постоянная интегрирования A_1 найдется из начальных условий.

При $t = 0$, $i(0) = I = U/R$. Тогда имеем:

$$i(0) = A_1 e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} = \frac{U}{R} \quad \text{и} \quad A_1 = \frac{U}{R}. \quad (19)$$

После решения уравнения (16), ток короткого замыкания в катушке запишется:

$$i(t) = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = I e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (20)$$

Закон изменения напряжения на катушке будет таким:

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d}{dt} \left(\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L} t} \right) = -L \frac{U}{R} \left(-\frac{R}{L} \right) \cdot 1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U \cdot e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (21)$$

Построим графики по выражениям (20) и (21):

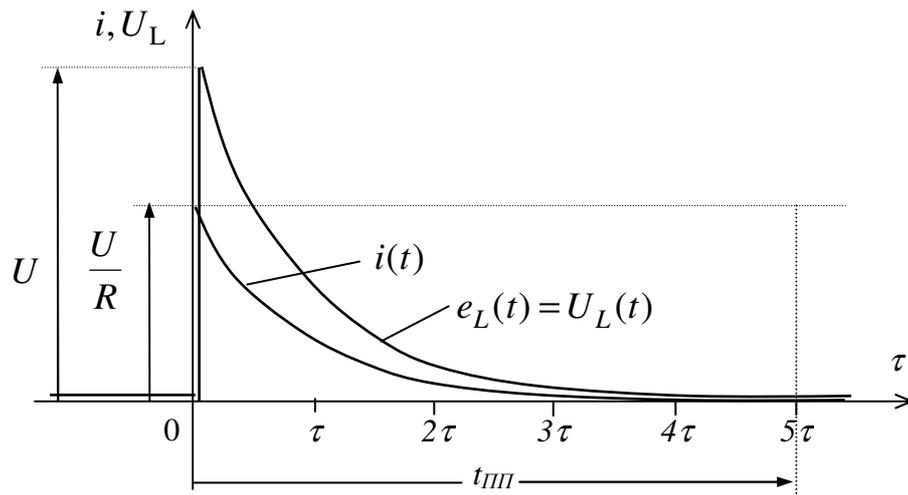


Рисунок 5 – Графики тока - $i(t)$ и напряжения - $U_L(t)$

На основании выражений (20), (21) и графиков можно сделать следующие выводы:

1 Ток в момент короткого замыкания катушки не изменяется ни по величине, ни по направлению, а затем плавно по экспоненциальному закону снижается и через время $t = 5\tau$ обращается практически в ноль.

2 Напряжение на индуктивности в момент короткого замыкания изменяется скачком от нуля до напряжения источника, который питал катушку до короткого замыкания. Это напряжение (ЭДС катушки) создает и поддерживает ток в режиме короткого замыкания. Оно спадает по экспоненциальному закону и через время $t = 5\tau$ обращается в ноль.

3 Переходные процессы включения и короткого замыкания катушки протекают с одной и той же постоянной времени и имеют одну и ту же продолжительность.

4 Переходный процесс прекращается, когда запас энергии в магнитном поле катушки исчерпывается. При коротком замыкании энергия магнитного поля превращается в тепловую энергию на сопротивлении R и рассеивается в окружающее пространство.

Энергия магнитного поля катушки

Чтобы определить энергию магнитного поля катушки, достаточно рассчитать энергию, которая переходит в тепло на сопротивление R при коротком замыкании.

$$W_L = R \int_0^{\infty} i^2 dt, \quad i = I e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (22)$$

Проинтегрируем выражение (22), тогда получим:

$$\begin{aligned} W_L &= R \int_0^{\infty} i^2 dt = R \int_0^{\infty} \left(I e^{-\frac{R}{L}t} \right)^2 dt = RI^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} dt = \\ &= RI^2 \left(-\frac{L}{2R} \right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}t} d \left(-\frac{2R}{L}t \right) = -\frac{LI^2}{2} e^{-\frac{2R}{L}t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{LI^2}{2} \left(e^{-\frac{2R}{L}\infty} - e^{-\frac{2R}{L}0} \right) = \frac{LI^2}{2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно (23) энергия магнитного поля катушки связана только с током и от напряжения не зависит.

1.9.3 Заряд и разряд конденсатора. Энергия электрического поля конденсатора. Законы коммутации

Заряд конденсатора

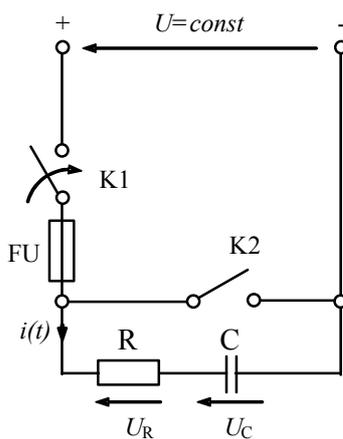


Рисунок 6 – Включение конденсатора на постоянное напряжение

Рассмотрим, как изменяется ток i и напряжение U_C во время переходного режима при включении емкости на постоянное напряжение. Схема цепи представлена на рисунке 6.

В момент времени $t=0$ ключ $K1$ замыкается, и начинается переходный процесс заряда конденсатора, представленного на схеме своими параметрами: емкостью C и активным сопротивлением соединительных проводов R . Начальные условия процесса: при $t=0$, $U_C(0)=0$.

Электрическое состояние цепи для любого момента времени будет:

$$U_C + U_r = U, \quad \text{но} \quad (25)$$

$$i = C \frac{dU_C}{dt}, \quad \text{поэтому} \quad U_r = Ri = RC \frac{dU_C}{dt}. \quad (26)$$

Подставим выражения (26) в (25), тогда получим:

$$RC \frac{dU_c}{dt} + U_c = U. \quad (27)$$

Примечание

Решение уравнения (27) будет таким:

$$U_c = U'_c + U''_c.$$

Далее расчет проводим, как и для катушки.

$$RC \frac{dU'_c}{dt} + U'_c = U, \text{ отсюда при } U'_c = \text{const}, U'_c = U. \quad (28)$$

Для переходной составляющей процесса U''_c имеем

$$RC \frac{dU''_c}{dt} + U''_c = 0. \quad (29)$$

Характеристическое уравнение цепи будет таким: $RCp + 1 = 0$. Откуда определим корень данного уравнения или коэффициент затухания:

$$p = -\frac{1}{RC}. \quad (30)$$

Решение уравнения (28) ищем в виде

$$U''_c = Ae^{pt}. \quad (31)$$

Размерность величины, обратной p , соответствует размерности времени.

$$\left[\frac{1}{p} \right] = [RC] = \left[\text{Ом} \cdot \frac{\text{с}}{\text{Ом}} \right] = [\text{с}], \text{ поэтому вводят понятие}$$

постоянной времени τ , равной

$$\tau = RC. \quad (32)$$

Здесь постоянная времени имеет тот же физический смысл, как и τ в цепи RL . Переходный процесс и здесь будет длиться:

$$t_{\text{III}} = 5\tau = 5RC. \quad (33)$$

Решение уравнения (27) получим, подставив в него (28) и (31).

$$U_c = U'_c + U''_c = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (34)$$

Постоянная интегрирования A найдется из начальных условий.

$$U_c(0) = U + Ae^{-\frac{0}{\tau}} = 0, \text{ откуда } A = -U. \quad (35)$$

Подставим (35) в (27) и получим закон изменения напряжения на конденсаторе в переходном процессе,

$$U_c = U - Ue^{-\frac{t}{RC}} = U - Ue^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (36)$$

Ток через конденсатор определяется по закону Ома для диэлектрика:

$$i = C \frac{dU_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left(U - Ue^{-\frac{t}{RC}} \right) = C(-U) \cdot \left(-\frac{1}{RC} \right) \cdot 1 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, \text{ или оконча-}$$

тельно

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (37)$$

Построим выражения (36) и (37) графически, см. рисунок 7.

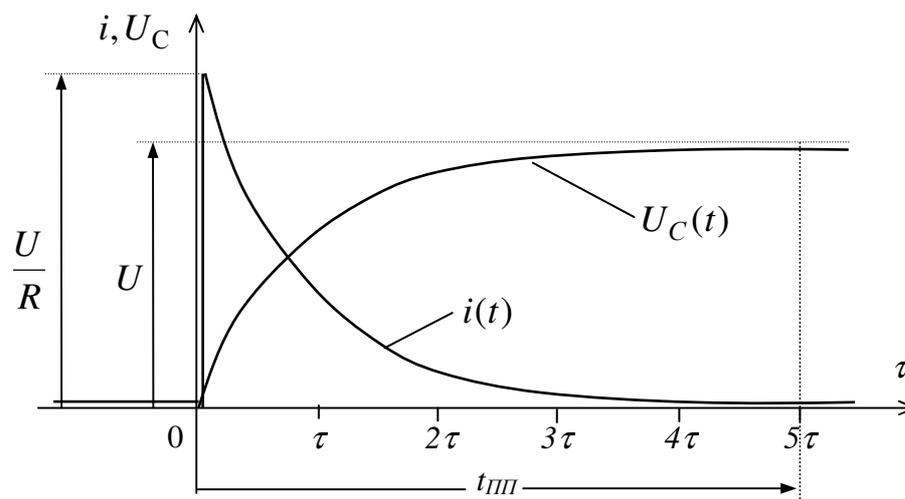


Рисунок 7 - Графики тока - $i(t)$ и напряжения - $U_C(t)$

На основании выражений (36), (37) и графиков можно сделать следующие выводы:

1 Напряжение в момент включения конденсатора равно нулю (конденсатор как бы короткозамкнут), а затем плавно по экспоненциальному закону возрастает и через время $t = 5\tau$ достигает установившегося значения и перестает зависеть от времени.

2 Ток на емкости i в момент включения скачком возрастает от нуля до величины U/R , а затем плавно по экспоненциальному закону спадает и через время $t = 5\tau$ обращается в нуль. Величина тока в первый момент ограничивается только сопротивлением R .

3 Часть энергии, поступающей в емкость, запасается в виде электрического поля в диэлектрике емкости (в виде электрической деформации диэлектрика).

4 Переходный процесс прекращается, когда запас энергии в электрическом поле конденсатора исчерпывается. При коротком замыкании энергия электрического поля превращается в тепловую энергию на сопротивлении R и рассеивается в окружающее пространство.

Разряд конденсатора

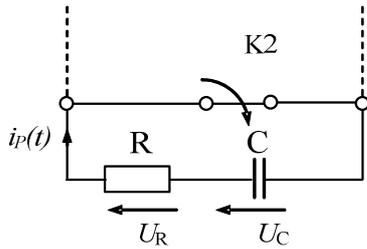


Рисунок 8 – Короткое замыкание заряженного конденсатора

Закоротим накоротко емкость, на которой действовало установившееся напряжение $U_C = U$, для чего замкнем ключ К2. Предохранитель FU при этом сгорает, и ветвь с конденсатором оказывается отключенной от источника питания. Полученная схема приведена на рисунке 8.

Очевидно, что напряжение на емкости сразу не исчезнет. Оно некоторое время будет действовать за счет запасов энергии в электрическом

поле емкости.

Электрическое состояние цепи может быть выражено таким образом:

$$U_C - U_R = 0. \quad (38)$$

Под действием напряжения U_C ток короткого замыкания i_p будет течь в сторону, противоположную зарядному току.

$$U_R = Ri_p, \text{ но } i_p = -C \frac{dU_C}{dt}, \text{ тогда } U_R = Ri_p = -RC \frac{dU_C}{dt}. \quad (39)$$

Подставим (39) в (38):

$$RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0. \quad (40)$$

Мы получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Примечание.

Уравнение (40) решается так:

$$U_C = U_C'' = Ae^{pt}. \quad (41)$$

Характеристическое уравнение будет $RCp + 1 = 0$. Решением его является соотношение:

$$p = -\frac{1}{RC}, \quad \tau = RC. \quad (42)$$

Длительность процесса разряда конденсатора и здесь равна пяти постоянным времени - 5τ .

Постоянная интегрирования A найдется из начальных условий.

$$U_C(0) = Ae^{-\frac{0}{\tau}} = U = Ae^{-\frac{0}{\tau}} = U, \text{ окончательно имеем } A = U. \quad (43)$$

Решением уравнения (40) будет:

$$U_C = Ue^{-\frac{t}{RC}} = Ue^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (44)$$

Ток через емкость будет изменяться по следующему закону:

$$i_p = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (45)$$

На основании выражений (44) и (45) построим графики, изображенные на рисунке 3.8.

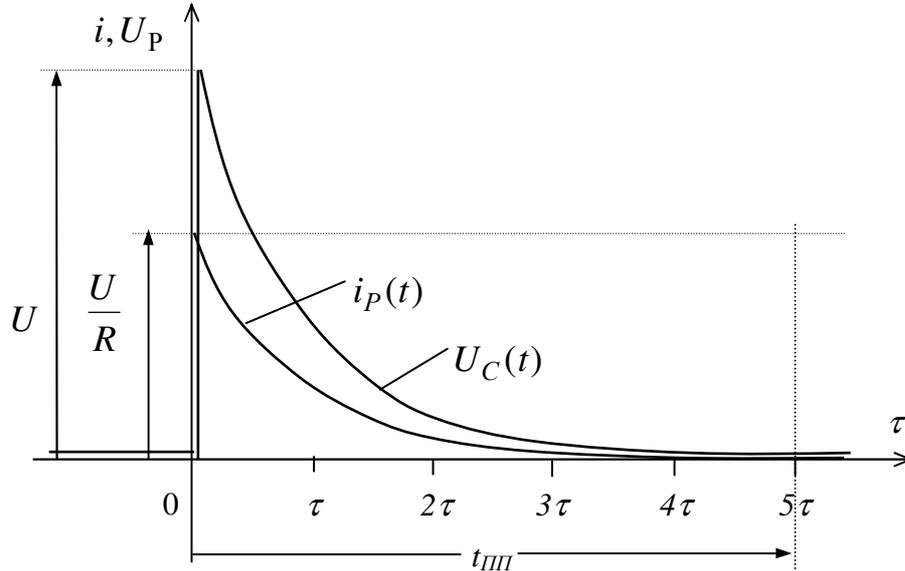


Рисунок 9 - Графики тока - $i(t)$ и напряжения - $U_C(t)$

Какие же можно сделать выводы?

1 Напряжение в момент короткого замыкания емкости не изменяется ни по величине, ни по направлению, а затем плавно по экспоненциальному закону снижается и через время $t = 5\tau$ обращается в ноль.

2 Ток в момент короткого замыкания емкости изменяется скачком от нуля до U/R , а затем спадает до нуля.

3 Переходные процессы включения и короткого замыкания емкости протекают с одной постоянной времени и продолжаются одинаковое время.

4 Переходный процесс заканчивается, когда запас энергии в электрическом поле емкости исчерпывается.

Энергия электрического поля емкости

Чтобы определить энергию электрического поля емкости поступим так же, как и для индуктивности.

Подсчитаем количество тепла, которое выделится на активном сопротивлении цепи, в процессе разряда конденсатора.

$$\begin{aligned} W_C &= R \int_0^{\infty} i^2 dt = R \int_0^{\infty} \left(I e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 dt = R \int_0^{\infty} \frac{U^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \\ &= R \frac{U^2}{R^2} \left(-\frac{RC}{2} \right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} d \left(-\frac{2t}{RC} \right) = -\frac{CU^2}{2} e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^{\infty} = \frac{CU^2}{2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Законы коммутации

На основании рассмотренных переходных процессов можно сформулировать два закона коммутации.

Первый закон коммутации

В любой ветви с индуктивностью ток и магнитный поток в момент коммутации сохраняют те же значения, которые они имели до коммутации, и дальше начинают изменяться именно с этих значений.

Второй закон коммутации

В любой ветви с емкостью напряжение и заряд в момент коммутации будут иметь те же значения, которые они имели до коммутации, и в дальнейшем будут изменяться, начиная именно с этих значений.

1.9.4 Включение полной цепи RLC на постоянное напряжение

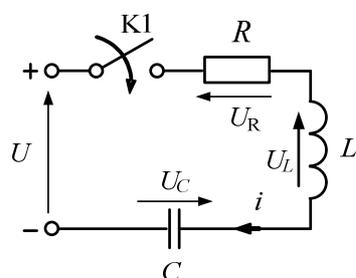


Рисунок 10 – Цепь RLC

Цепь с последовательным соединением элементов R , L , и C показана на рисунке 10.

Электрическое равновесие цепи, согласно второму закону Кирхгофа, запишется так:

$$U = U_R + U_L + U_C, \text{ но}$$

$$U_R = Ri = RC \frac{dU_C}{dt}, U_L = LC \frac{d^2U_C}{dt^2}.$$

Поэтому можно записать:

$$LC \frac{d^2U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U. \quad (47)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (47) обычно отыскивается в виде

$$U_C = U_{Cnp} + U_{Cсв}. \quad (48)$$

Согласно выражению (48) процесс в данной цепи можно рассматривать состоящим из двух накладывающихся друг на друга процессов – принужденного, который как бы наступил сразу, и свободного, имеющего место только во время переходного режима.

Под **принужденным режимом** понимают электрическое состояние цепи, которое установится после окончания переходного процесса.

Видим, что принужденный режим в данном случае таков:

$$i_{np} = 0, U_{Rnp} = 0, U_{Lnp} = 0, U_{Cnp} = U. \quad (49)$$

Видим, что характер переходного процесса определяется только свободным режимом.

Под **свободным режимом** понимают процесс, который происходит за счет энергии запасенной внутри цепи. Когда эта энергия преобразуется в тепло на активном сопротивлении цепи, переходный процесс закончится.

В этом режиме дифференциальное уравнение (47) будет иметь вид:

$$LC \frac{d^2 U_{C_{св}}}{dt^2} + RC \frac{dU_{C_{св}}}{dt} + U_{C_{св}} = 0 \text{ или разделив все на } RC,$$

$$\frac{d^2 U_{C_{св}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dU_{C_{св}}}{dt} + U_{C_{св}} = 0. \quad (50)$$

Характеристическое уравнение в данном случае будет иметь вид:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (51)$$

Характер свободного процесса будет определяться видом корней характеристического уравнения (51).

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (52)$$

Из выражения (52) видно, что корни характеристического уравнения $p_{1,2}$ могут иметь три основных вида.

Апериодический переходный процесс (корни характеристического уравнения вещественные, отрицательные и разные)

При таких корнях переходный процесс в электрической цепи называется апериодическим. Для апериодического режима в нашем случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = a > 0; \quad \frac{R}{2L} = b, \text{ тогда } \left. \begin{aligned} p_1 = -b + a < 0; \\ p_2 = -b - a < 0 \end{aligned} \right\}, \quad (53) \end{aligned}$$

где p_1 и p_2 – коэффициенты затухания, при этом $|p_2| > |p_1|$. Так как $|b| > |a|$ и $|a| > 0$ то корни вещественные.

Это значит, что вторая составляющая свободного процесса будет затухать быстрее, чем первая.

Постоянные времени составляющих переходного процесса будут таковы:

$$\tau_1 = \left| \frac{1}{p_1} \right| > \tau_2 = \left| \frac{1}{p_2} \right|. \quad (54)$$

Это значит, что переходный процесс второй составляющей короче первой. Общее время переходного процесса определяется по наибольшей постоянной времени $t_{III} = 5\tau_1$.

С другой стороны:

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}. \text{ Поэтому } R^2 > 4 \frac{L^2}{LC} = 4 \frac{L}{C}, \text{ отсюда имеем}$$

$$R > 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho, \quad (55)$$

где R – активное сопротивление цепи;

$\rho = \sqrt{L/C}$ – волновое сопротивление цепи или резонансное сопротивление.

Апериодический режим может существовать только тогда, когда активное сопротивление цепи больше двух волновых или резонансных сопротивлений этой же цепи.

Решение уравнения (47) дает следующие результаты:

$$U_C = U + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \quad \text{и} \quad i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (57)$$

Изобразим полученные величины на графике (рисунок 11) при постоянных времени $\tau_1 > \tau_2$.

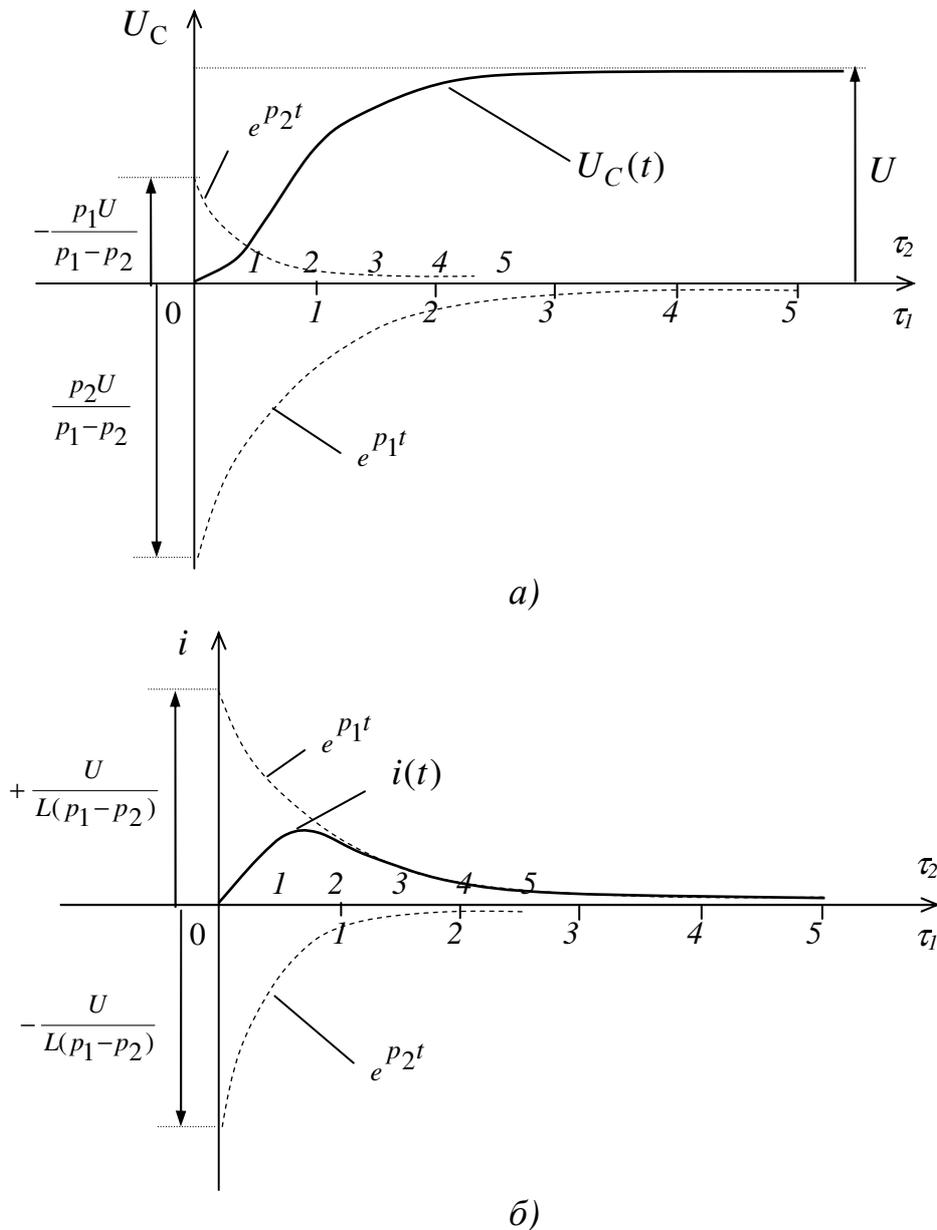


Рисунок 11 – Напряжение на емкости (а) и ток (б) при включении апериодической цепи $R L C$ на постоянное напряжение

Колебательный переходный процесс (корни характеристического уравнения сопряженные комплексные, с отрицательной вещественной частью)

При таких корнях переходный процесс в электрической цепи называется колебательным.

Для колебательного режима в нашем случае имеем:

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC} \text{ или } \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \pm j\omega_0, \quad (58)$$

где ω_0 – собственная частота колебаний цепи.

Период колебаний в контуре будет $T_0 = \omega_0 / 2\pi$.

Корни характеристического уравнения:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -b + j\omega_0; \\ p_2 &= -b - j\omega_0 \end{aligned} \right\}. \quad (59)$$

С другой стороны $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, поэтому $R^2 < 4\frac{L^2}{LC} = 4\frac{L}{C}$, отсюда имеем

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho. \quad (60)$$

Колебательный переходный процесс затухает с коэффициентом затухания $b = \frac{R}{2L}$, поэтому общее время данного переходного процесса

можно оценить, как $t_{III} = 5 \cdot \frac{1}{b}$.

Колебательный режим может существовать только тогда, когда активное сопротивление цепи меньше двух волновых или резонансных сопротивлений этой же цепи. Решения уравнения (47) для данного случая таково:

$$i = i_{cs} = -\frac{U}{L\omega_0} e^{-bt} \cdot \sin \omega_0 t = \frac{U}{L\omega_0} e^{-bt} \cdot \sin(\omega_0 t + \pi), \quad (61)$$

$$U_C = U_{cs} = \frac{U}{\omega_0 \sqrt{LC}} e^{-bt} \sin(\omega_0 t + \chi), \quad (62)$$

При определении постоянных интегрирования в данном случае, необходимо принять напряжение установившегося режима на емкости равным нулю. На рисунке 12 зависимости (61) и (62) показаны графически.

Затухание колебаний в контуре происходит за счет поглощения энергии в активном сопротивлении цепи.

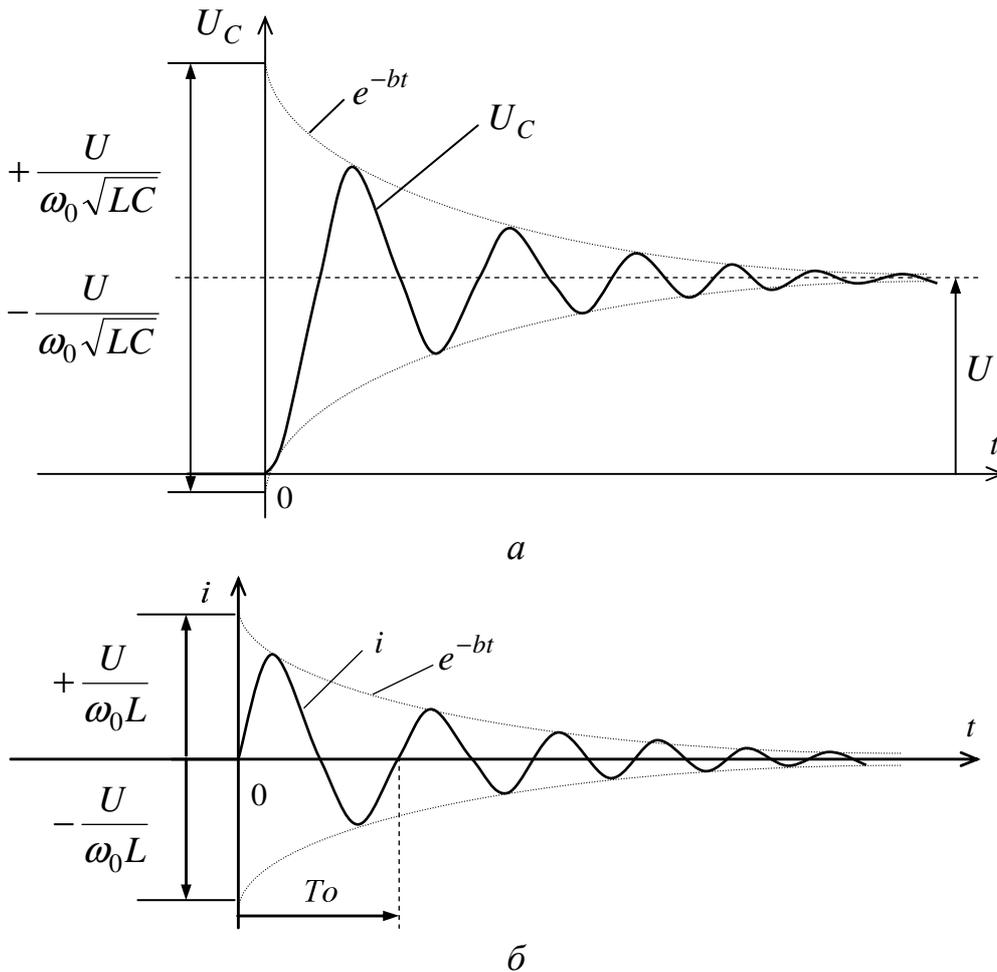


Рисунок 12 – Напряжение (а) и ток (б) емкости при включении колебательной цепи на постоянное напряжение

Критический или граничный переходный процесс (корни характеристического уравнения вещественные, отрицательные и равные)

При таких корнях переходный процесс в цепи называется критическим, граничным или предельным.

Для граничного режима имеем $p_1 = p_2$.

Постоянные времени будут одинаковыми, $\tau_1 = \tau_2 = \left| \frac{1}{p_1} \right| = \left| \frac{1}{p_2} \right|$.

Такой режим наступает в цепи, когда активное сопротивление цепи равно двум волновым сопротивлениям этой же цепи

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\rho. \quad (63)$$

По своему характеру указанный режим является предельным случаем аperiodического режима. Такой режим является промежуточным между аperiodическим и колебательным режимами. Он весьма неустойчив. Малейшее нарушение соотношения между параметрами и процесс перехо-

дит либо в зону колебательного, либо в зону апериодического режимов, поэтому граничный режим на практике не используется и в данной работе не исследуется.

1.9.5 Операторный метод расчета переходных процессов. Теорема Хэвисайда

Операторный метод расчета переходных процессов основан на операционном исчислении. Операционный метод решения дифференциальных уравнений отличается от классического метода рядом ценных качеств, главные из них:

1) сложное действие дифференцирования заменяется простым умножением на некоторую переменную "p", которая называется оператором, а действие интегрирования – делением на эту же переменную; $A_1, A_2, A_3 \dots$ - начальные условия входят в основные уравнения сразу, поэтому не требуется в ходе расчета составлять громоздкие системы уравнений для отыскания постоянных интегрирования по начальным условиям.

Основой операционного метода является функциональное преобразование. Это значит, что функция вещественного переменного $t \dots f(t)$ соответственно выражается через функцию комплексного переменного $p \dots F(p)$.

Используя символы, применяемые в операционном исчислении, основное функциональное преобразование можно записать:

$$f(t) \leftarrow F(p), \quad (64)$$

где $f(t)$ – называется *оригиналом функции* или начальной функцией, или временной функцией;

$F(p)$ – называется *изображением функции* $f(t)$ или операторной функцией;

\leftrightarrow – называется *знаком соответствия*, острие стрелки которого направляется всегда в сторону начальной функции, т.е. в сторону оригинала.

Знак соответствия « \leftrightarrow » не является обычным знаком равенства, т.к. независимые переменные t и p различны по размерности.

Начальные или временные функции обозначаются малыми буквами, а их изображения – соответствующими им прописными.

В операционном исчислении оригинал и изображение функции связываются между собой линейными интегральными преобразованиями, называемыми интегралом Лапласа и интегралом Лапласа-Карсона. Последний интеграл более удобен для расчета электрических цепей, поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться им.

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t) dt. \quad (65)$$



Рисунок 13 - Пьер-Симон Лаплас (1749 - 1827), граф Империи при Наполеоне, маркиз при Людовике XVIII, выдающийся французский математик, физик и астроном. Заслуги Лапласа в области чистой и прикладной математики и особенно в астрономии громадны

Интеграл Лапласа-Карсона позволяет сложное дифференциальное уравнение изобразить алгебраическим уравнением.

В результате решения алгебраического уравнения мы получаем не функцию вещественного переменного $f(t)$, а лишь ее изображение в виде операционной функции $F(p)$. Поэтому необходимо, теперь, решить обратную задачу: найти по изображению функции ее оригинал.

Для этого интеграл Лапласа-Карсона должен быть разрешен относительно $f(t)$. В общем случае такое решение дано английским математиком Бромвичем и называется интегралом Бромвича.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_s e^{p+F(p)} dp. \quad (66)$$

Все операционное исчисление, таким образом, основано на двух взаимно обратных интегралах: интеграле Лапласа или Лапласа-Карсона и интеграле Бромвича.

При этом для операторных величин (токов, напряжений и т.д.) сохраняются законы Ома, Кирхгоффа и все известные методы расчета цепей.

Примечания.

Рассмотрим с помощью интеграла Лапласа-Карсона некоторые теоремы операционного метода.

а) Изображение постоянной величины

Пусть $f(t) = A = \text{const}$. Тогда $A \leftrightarrow A$. (67)

Изображение постоянной величины равно самой величине.

б) Изображение алгебраической суммы двух функций

$$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t) \leftrightarrow F(p) = F_1(p) \pm F_2(p). \quad (68)$$

в) Изображение показательной функции

$$e^{\pm \alpha t} \leftrightarrow \frac{p}{p \mp \alpha} \dots \quad (69)$$

г) Изображение синусоидальных функций

$$\sin(\alpha t) = \frac{\alpha p}{p^2 + \alpha^2}, \quad (70)$$

$$\cos(\alpha t) = \frac{p^2}{p^2 + \alpha^2}, \quad (71)$$

з) Изображение производной функции

Для n -ой производной имеем:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^n(t) \leftrightarrow p^n \left[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \frac{f''(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^{n-1}} \right]. \quad (72)$$

Если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = f^n(t) \leftrightarrow p^n F(p). \quad (73)$$

д) Изображение интеграла функции

$$\int_0^t f(t) dt = \phi(t) \leftrightarrow \phi(0) + \frac{F(p)}{p}, \quad (74)$$

где $\phi(0) = \int_0^t f(t) dt|_{t=0}$ - начальное значение интеграла функции $f(t)$ при $t=0$.

Если начальное значение интеграла функции при $t=0$ равно нулю, то:

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}. \quad (75)$$

Ход расчетов следующий.

Во-первых, исходная схема преобразуется в операционный вид, рисунок 14. При этом:

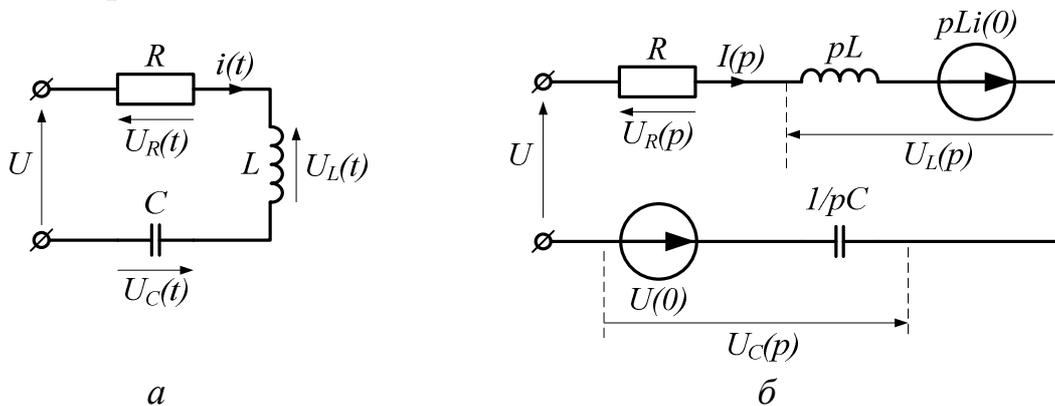


Рисунок 14 – Получение операторной расчетной схемы: а – исходная схема; б – расчетная схема в операторной форме

- все постоянные величины: ЭДС источника, активные сопротивления в ветвях имеют своими изображениями такие же постоянные величины;

- все индуктивные реактивные сопротивления имеют своими изображениями $\omega \cdot L \leftrightarrow p \cdot L$. Если начальное значение тока в катушке не равно нулю, то последовательно с катушкой включается источник постоянного напряжения величиной $p \cdot L \cdot i(0)$, который направлен по току;

- все емкостные реактивные сопротивления имеют своими изображениями $\frac{1}{(\omega \cdot C)} \leftrightarrow \frac{1}{(p \cdot C)}$. Если начальное значение напряжение на конденсаторе отлично от нуля и равно U_0 , то последовательно с емкостью включается источник постоянного напряжения величиной U_0 . Направление ЭДС источника – против тока.

Затем полученная расчетная схема рассчитывается любым из известных методов расчета цепей. Полученный результат является функцией комплексного переменного p .

Первый закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{i=1}^{i=n} I_i(p) = 0. \quad (76)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{i=1}^{i=n} E_i(p) - \sum_{k=1}^{k=m} Z_k(p) \cdot I_k(p) = 0; \quad (77)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} E_i(p) + \sum_{k=1}^{k=m} U_k(p) = 0.$$

Закон Ома в операторной форме:

$$I(p) = \frac{E(p)}{Z(p)}. \quad (78)$$

Все рассмотренные ранее методы расчета цепей действительны и для расчета переходных режимов операторным методом.

Теорема разложения Хэвисайда

Ранее мы показали, что результат расчета цепи будет иметь форму операторной функции.

Решение в таком виде для практики не пригодно, его необходимо привести обратно в функцию от времени.

Выше мы указывали, что для обратного перехода необходимо в общем случае применять интеграл Бромвича. Однако путь этот очень сложен. На практике часто пользуются не интегралом Бромвича, а теоремой разложения Хэвисайда.

Теорема разложения представляет собой готовую формулу для определения оригинала функции $f(t)$ по известному изображению этой функции $F(p)$. Она является результатом решения интеграла Бромвича для функции $F(p)$ частного вида.

Функция $F(p)$ в этом случае должна быть выражена рациональной дробью:

$$F(p) = \frac{H(p)}{F(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n}. \quad (79)$$



Рисунок 15 - Оливер Хевисайд (1850 - 1925), английский учёный, инженер, математик и физик. Впервые применил преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений

Рациональная дробь (79) кроме того, должна удовлетворять следующим свойствам:

- наивысшая степень оператора p знаменателя n должна быть больше наивысшей степени оператора p числителя m или, в крайнем случае, равна ей $n \geq m$. Это условие для задач прикладного характера почти всегда удовлетворяется.

- корни $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$ знаменателя $F(p)$, полученные решением уравнения $F(p) = 0$ должны быть все простые (отсутствуют корни равные друг другу и кратные корни) и не один из корней не должен ни при каких условиях быть корнем числителя $H(p)$ (не обращать числитель $H(p)$ в нуль при подстановке в него $p_1, p_2, \dots, p_k, \dots, p_n$). Если есть дополнительный $n+1$ корень, то он может быть равен нулю.
- все вещественные корни должны быть отрицательными, а все комплексные – иметь отрицательную вещественную часть.

С учетом вышесказанного получится, что первообразная функция $f(t)$ операторной функции $F(p)$ будет иметь следующий вид:

$$F(p) = \frac{H(p)}{F(p)} \leftrightarrow f(t) = \frac{H(0)}{F(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{H(p_k)}{p_k \cdot F'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (80)$$

где член $H(0)/F(0)$, который получается от подстановки дополнительного нулевого корня $p_{n+1} = 0$, определяет принужденную составляющую или установившийся режим для постоянного тока или напряжения;

$\sum_{k=1}^n \frac{H(p_k)}{p_k \cdot F'(p_k)} e^{p_k t}$ – определяет сумму свободных режимов для тока или напряжения.

Выражение (80) называется теоремой разложения.

Используя теорему разложения, можно находить начальную функцию по ее изображению, не прибегая к интегралу Бромвича, в этом и состоит основная ценность теоремы.

Контрольные вопросы

1. Понятие о переходном процессе в линейной электрической цепи. Причины возникновения и сущность переходных процессов.
2. Классический метод расчета. Порядок составления и методы решения уравнений электрической цепи. Свободные и принужденные составляющие.
3. Рассмотреть переходный процесс при включении катушки на постоянное напряжение.
4. Переходный процесс при коротком замыкании катушки с током.
5. Сформулировать первый закон коммутации. Вывести формулу энергии магнитного поля катушки.
6. Рассмотреть переходный процесс при заряде и разряде конденсатора.
7. Сформулировать второй закон коммутации. вывести формулу энергии электрического поля конденсатора.
8. Порядок расчета переходных процессов классическим методом. Расчет переходного процесса в последовательной цепи RLC при ее на постоянное напряжение.
9. Условия возникновения в цепи колебательных, переходных и апериодических режимов.
10. Операторный метод расчета переходных процессов. Законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.
11. Операторные схемы и уравнения цепи.
12. Теорема разложения Хевисайда.